

Analisis Model dan Simulasi Penyebaran Hoaks dan Penanganannya dengan Vaksinasi Sosial

Rifki Ristiawan^{1*}, Mahyudi², Endaryono³, & Aswin Saputra⁴
^{1,2,3,4.} Universitas Indraprasta PGRI

INFO ARTICLES

Key Words:

SIRV model; social vaccination; prebunking; hoax spread; basic reproduction number.



This article is licensed under a Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License.

Abstract: In the digital era, hoaxes pose a serious societal threat, requiring proactive strategies such as social vaccination or prebunking. This study models the effectiveness of this strategy using the SIRV (Susceptible, Infected, Recovered, Vaccinated) epidemiological approach, incorporating equilibrium point analysis, stability analysis, and numerical simulations. The results reveal two equilibrium points, a hoax-free (E^0) and an endemic state, where E^0 is proven to be locally asymptotically stable when $R_0 < 1$. The calculation yields the basic reproduction number with vaccination, formulated as $R_v = \frac{\beta(\mu+\delta)}{(\gamma+\mu)(\mu+\delta+\alpha)}$. This confirms that increasing the vaccination rate (α) directly reduces R_v . Numerically, $R_v < 1$ leads to the extinction of hoaxes, whereas $R_v > 1$ keeps them endemic. Consequently, the optimal strategies are intensifying digital literacy campaigns to raise α and maintaining sustainable vaccination programs to suppress δ .

Abstrak: Di era digital, hoaks menjadi ancaman serius yang memerlukan strategi proaktif, salah satunya adalah vaksinasi sosial atau prebunking. Penelitian ini bertujuan memodelkan efektivitas strategi tersebut menggunakan pendekatan epidemiologi SIRV (Susceptible, Infected, Recovered, Vaccinated) melalui analisis titik ekuilibrium, kestabilan, dan simulasi numerik. Hasilnya, ditemukan dua titik ekuilibrium, yaitu bebas hoaks (E^0) dan endemik (E^*), di mana E^0 terbukti stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$. Dari hasil analisis diperoleh bilangan reproduksi dasar dengan vaksinasi, yaitu $R_v = \frac{\beta(\mu+\delta)}{(\gamma+\mu)(\mu+\delta+\alpha)}$, yang mengindikasikan bahwa peningkatan laju vaksinasi (α) secara langsung menurunkan nilai R_v . Secara numerik, kondisi $R_v < 1$ mengarah pada kepunahan hoaks, sedangkan $R_v > 1$ menjadikannya endemik. Oleh karena itu, strategi optimal yang direkomendasikan adalah menggencarkan kampanye literasi digital untuk menaikkan α dan menjaga keberlanjutan program vaksinasi untuk menekan δ .

Correspondence Address: Jln. Raya Tengah No.80, RT.1/RW.3, Gedong, Kec. Ps. Rebo, Kota Jakarta Timur, Daerah Khusus Ibukota Jakarta 13760, Indonesia; e-mail: endaryono612@gmail.com, saputraaswin133@gmail.com.

How to Cite (APA 6th Style): Ristiawan, R., Mahyudi, Endaryono. & Saputra, A. (2026). Analisis Model dan Simulasi Penyebaran Hoaks dan Penanganannya dengan Vaksinasi Sosial. *Prosiding Diskusi Panel Nasional Pendidikan Matematika*, 553-564.

Copyright: Rifki Ristiawan, Mahyudi, Endaryono, & Aswin Saputra. (2026)

PENDAHULUAN

Fenomena penyebaran informasi palsu atau hoaks di era digital telah bertransformasi menjadi ancaman serius bagi stabilitas sosial dan kesehatan publik. Pola transmisi hoaks di media sosial menunjukkan karakteristik yang serupa dengan penyebaran penyakit menular, di mana informasi yang salah dapat "menginfeksi" pikiran individu melalui interaksi digital yang masif (Sarjito, 2024). Fenomena penyebaran hoaks di Indonesia telah mencapai tingkat yang mengkhawatirkan seiring dengan meningkatnya penetrasi internet dan penggunaan media sosial. Data menunjukkan bahwa 68% warga Indonesia belum mampu memeriksa kebenaran informasi yang mereka terima, sedemikian sehingga menjadikan hoaks sebagai ancaman serius bagi ketertiban masyarakat dan stabilitas demokrasi di era digital (Safira, 2025). Ketidakmampuan masyarakat dalam memfiltrasi informasi valid dan fabrikasi menyebabkan eskalasi polarisasi sosial yang tajam (Pennycook & Rand, 2021).

Dalam perspektif epidemiologi informasi, individu yang terpapar hoaks tanpa memiliki kemampuan verifikasi dianggap sebagai populasi rentan (*Susceptible*), sementara mereka yang menyebarkannya merupakan agen infeksi (*Infected*) (Vosoughi et al., 2018). Mekanisme penyebaran hoaks menunjukkan kemiripan pola yang mencolok dengan penyebaran penyakit menular. Dinamika sosial dapat dianalisis seperti sistem ekologis di mana misinformasi menyebar secara kontagius melalui jejaring sosial (Ahlina et al., 2024). Pendekatan konvensional yang hanya mengandalkan pemulihan alami (*Recovery*) setelah seseorang menyadari kesalahannya sering kali terlambat karena hoaks menyebar lebih cepat dan lebih dalam daripada kebenaran (Ibrahim, 2024). Oleh karena itu, diperlukan strategi intervensi proaktif yang mampu membangun ketahanan kognitif masyarakat sebelum terpapar informasi menyesatkan.

Salah satu konsep yang kini mulai dikembangkan adalah "vaksinasi sosial" atau prebunking. Berbeda dengan debunking yang bersifat reaktif, vaksinasi sosial bekerja dengan memberikan paparan dosis kecil terhadap teknik-teknik manipulasi informasi, sehingga masyarakat memiliki "antibodi kognitif" (Roozenbeek & van der Linden, 2024).

Pemodelan matematika merupakan salah satu metode yang dapat digunakan untuk memperoleh solusi alternatif dari suatu masalah kehidupan nyata seperti pada penyebaran hoaks dan penanganannya dengan vaksinasi sosial. Salah satu pemodelan yang dapat digunakan untuk menganalisis pola sebaran dan penanganan penyebaran hoaks adalah model SIR (*Susceptible, Infected and Recovered*). Model SIR seringkali digunakan untuk memprediksi pola sebaran suatu wabah/penyakit yang menyebar pada suatu daerah pada kurun waktu tertentu. (Setiawan & Mungkasi, 2021). Penggunaan model matematika dengan kompartemen vaksinasi (V) menjadi sangat relevan untuk menganalisis sejauh mana edukasi literasi digital dapat menekan angka reproduksi penyebaran hoaks secara signifikan (Zhao et al., 2021).

Dalam model SIRV, parameter vaksinasi sosial dan laju hilangnya kekebalan vaksin menjadi variabel krusial. Mengingat sifat hoaks yang terus berevolusi, individu yang telah mendapatkan "vaksin" literasi tetap memiliki risiko kembali menjadi rentan jika tidak dilakukan pembaruan pengetahuan secara berkala (Cao et al., 2023). Secara matematis, stabilitas titik kesetimbangan bebas rumor sangat bergantung pada efektivitas laju vaksinasi ini dalam populasi (Xu et al., 2019). Dengan demikian, penguatan literasi informasi bukan lagi sekadar himbauan, melainkan kebutuhan sistemik untuk memutus rantai transmisi informasi palsu secara permanen (Lewandowsky, S., & Van Der Linden, 2021).

Pemodelan Matematika

Pemodelan matematika merupakan bidang matematika yang digunakan untuk merepresentasikan dan menjelaskan sistem-sistem fisik atau masalah-masalah pada dunia nyata dalam pernyataan matematik, sehingga diperoleh pemahaman dari problem dunia real tersebut menjadi lebih tepat. Representasi matematika yang dihasilkan dari proses ini dikenal sebagai model matematika. Model matematika digunakan dalam banyak disiplin ilmu dan bidang studi yang berbeda (Widowati & Sutimin, 2020).

Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas. Berdasarkan jumlah variabel bebas yang terlibat, persamaan diferensial diklasifikasikan menjadi dua yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial (Ross, 2018).

Persamaan Diferensial Biasa (PDB) adalah persamaan diferensial yang melibatkan turunan biasa dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu variabel bebas.

Contoh:

$$1. \frac{d^2y}{dx^2} + xy \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

$$2. 4 \frac{d^4x}{dt^4} - 3 \frac{d^2x}{dt^2} + 3x = \cos t$$

Persamaan Diferensial Parsial (PDP) adalah persamaan diferensial yang melibatkan turunan parsial dari satu atau lebih variabel terikat terhadap lebih dari satu variabel bebas.

Contoh:

$$1. \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = v$$

$$2. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Sistem persamaan diferensial adalah suatu sistem yang memuat n persamaan diferensial, dengan $n \geq 1$. Antara persamaan diferensial yang satu dengan yang lain saling terkait dan konsisten. Bentuk umum dari suatu sistem persamaan diferensial orde satu dengan n fungsi kontinu ditulis:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

dengan $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah variabel terikat dan t adalah variabel bebas, sehingga $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t)$, dimana $\frac{dx_n}{dt}$ merupakan turunan fungsi x_n terhadap t , dan f_i adalah fungsi yang tergantung pada variabel $x_1, x_2, \dots, x_n$ dan t (Sinaga et al., 2021).

Titik Ekuilibrium

Titik ekuilibrium atau titik kesetimbangan merupakan solusi dari sistem persamaan diferensial yang tidak mengalami perubahan terhadap waktu. Titik ekuilibrium disebut juga sebagai titik stasioner (tetap).

Definisi: Titik ekuilibrium adalah titik yang memenuhi persamaan $\dot{x} = f(\bar{x}) = 0$. Jika sebuah solusi dimulai pada titik ini, maka akan konstan (Lynch, 2019). Kestabilan di titik ekuilibrium secara umum dibagi menjadi tiga jenis yaitu stabil, stabil asimtotik dan tidak stabil (Olsder & Woude, 2017).

Definisi : Diberikan suatu persamaan diferensial orde satu $\dot{x} = f(x)$ yang memiliki solusi $x(t, x_0)$ dengan kondisi awal $x(0) = x_0$. Vektor $\bar{x}$ yang memenuhi $f(\bar{x}) = 0$ disebut sebagai titik ekuilibrium.

1. Titik ekuilibrium $\bar{x}$ dikatakan stabil, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta$, maka $\|x(t, x_0) - \bar{x}\| < \varepsilon$ untuk setiap $t \geq 0$.
2. Titik ekuilibrium $\bar{x}$ dikatakan stabil asimtotik, jika titik ekuilibrium $\bar{x}$ stabil dan terdapat $\delta_1 > 0$ sedemikian sehingga jika $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta_1$, maka $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0) - \bar{x}\| = 0$.
3. Titik ekuilibrium $\bar{x}$ dikatakan tidak stabil, jika titik ekuilibrium $\bar{x}$ tidak memenuhi definisi.

Diberikan persamaan diferensial $\dot{x} = Ax$, dengan A adalah matriks berukuran $n \times n$, mempunyai k nilai eigen yang berbeda yaitu $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k$ dengan $k \leq n$.

1. Titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ adalah stabil asimtotik jika dan hanya jika $\lambda_i < 0$ untuk semua $i = 1, 2, 3, \dots, k$.
2. Titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ adalah stabil jika dan hanya jika $\lambda_i \leq 0$ untuk semua $i = 1, 2, 3, \dots, k$.
3. Titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ adalah tidak stabil jika dan hanya jika $\lambda_i > 0$ untuk semua $i = 1, 2, 3, \dots, k$.

Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar adalah rata-rata banyaknya individu rentan yang terinfeksi secara langsung oleh individu lain yang telah terinfeksi dan masuk ke dalam populasi yang seluruhnya masih rentan (Giesecke, 2021). Bilangan reproduksi dasar disebut juga sebagai laju rasio reproduksi dasar dari suatu infeksi. Bilangan reproduksi dasar biasanya dinotasikan dengan R_0 . Kondisi yang akan timbul adalah sebagai berikut:

1. Jika $R_0 < 1$ maka penyakit akan menghilang.
2. Jika $R_0 > 1$ maka penyakit akan meningkat dan menjadi wabah.

Penentuan bilangan reproduksi dasar (R_0) berdasarkan linearisasi dari sistem persamaan diferensial pada titik ekuilibrium bebas penyakit. Persamaan kompartemen kelas terinfeksi yang telah dilinearisasi pada titik ekuilibrium bebas penyakit adalah sebagai berikut:

$$\dot{x} = (F - V)x$$

dengan F dan V matriks berukuran $n \times n$,

$$F = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(0, y_0) \text{ dan } V = \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}(0, y_0)$$

dimana $(0, y_0)$ merupakan titik ekuilibrium bebas penyakit (penyebaran pandemi).

Selanjutnya didefinisikan matriks K sebagai berikut:

$$K = FV^{-1}$$

Dengan K disebut sebagai *next generation matrix*. Penentuan bilangan reproduksi dasar (R_0) ini akan diperoleh dengan mencari nilai eigen terbesar dari *next generation matrix* (Van Den Driessche & Watmough, 2016), yang dapat ditulis dalam bentuk:

$$R_0 = \rho(FV^{-1})$$

dengan,

$\rho(K)$: menunjukkan radius spektral dari matriks K

F : laju kemunculan infeksi baru pada kompartemen ke- i di titik E_0

V : laju perpindahan individu yang keluar dari kompartemen ke- i di titik E_0

METODE

Metode penelitian yang digunakan yaitu penelitian studi literatur deskriptif kuantitatif. Pada jenis penelitian ini bahan-bahan didapatkan dengan bersumber dari daftar pustaka dan buku-buku yang relevan dengan penelitian ini. Secara umum Langkah-langkah alur penelitian yaitu:

1. Membuat Diagram Kompartemen dan Model
Ditahap penelitian ini membuat diagram kompartemen model matematika penyebaran hoaks dengan membentuk persamaan diferensial dari model tersebut.
2. Mencari bilangan reproduksi dasar dan titik ekuilibrium
Kemudian dengan ditahap ini peneliti akan mencari bilangan reproduksi dasar dan titik ekuilibrium.
3. Analisis kestabilan titik ekuilibrium bebas penyebaran hoaks
selanjutnya pada tahap ini, peneliti akan memeriksa kestabilan titik ekuilibrium bebas penyebaran hoaks yang telah didapat dari langkah sebelumnya.
4. Nilai parameter
Untuk melakukan simulasi numerik dimana kurva ke stabilan titik ekuilibrium dapat ditinjau, nilai-nilai parameter yang digunakan didapatkan dari berbagai sumber referensi, namun nilai

parameter yang besarnya diasumsikan oleh peneliti.

5. Simulasi numerik

Simulasi numerik dilakukan untuk membuktikan teorema-teorema yang ada tentang titik ekuilibrium dan kestabilannya. Nilai parameter yang sudah didapatkan disubstitusi kedalam simulasi untuk memeriksa kestabilan titik ekuilibrium yang sudah didapatkan ditahap sebelumnya.

6. Kesimpulan

Selanjutnya penelitian dapat akan menyimpulkan atau dapat kesimpulan dari penelitian yang sudah dilakukan.

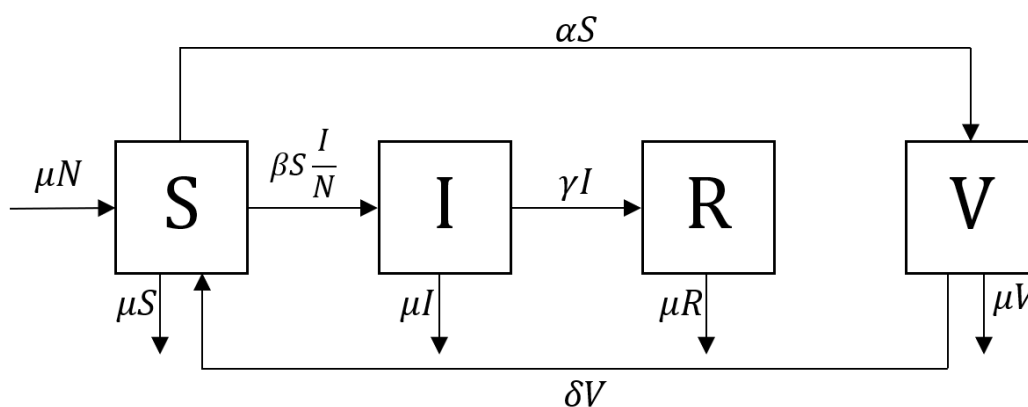
HASIL

Formulasi Model

Model matematika penyebaran hoaks dan penanganannya dengan vaksinasi sosial yang dibentuk dalam penelitian ini menggunakan pendekatan epidemiologi model *SIRV*. Pemodelan ini menggunakan struktur kompartemen yang berarti memiliki bagian per bagian dan beberapa istilah yang mungkin tergolong baru, namun dapat ditemukan padanannya dalam pemodelan di bidang epidemiologi. Istilah yang digunakan pada pemodelan ini adalah kelas rentan (*susceptible*), kelas yang hanya terpengaruh/terinfeksi (*invected*), kelas pemulihan (*recovery*), dan kelas vaksinasi sosial (*vaccinated*). Adapun pemodelan penyebaran hoaks dan penanganannya dengan vaksinasi sosial ini di didasari dari studi literatur dan dikembangkan dengan asumsi sebagai berikut:

1. Populasi dibagi menjadi dalam 4 kelas yaitu: kelas *susceptible* atau rentan (S), kelas terinfeksi (I), kelas pemulihan (R), dan kelas tervaksinasi (V)
2. Laju kelahiran bersifat konstan dan setiap kelahiran dari tiap kelas masuk ke dalam (S)
3. Seorang individu pada kelas S akan menjadi seorang yang terpengaruh hoaks dan berpotensi menyebarkannya kembali (S) bila melihat atau berinteraksi dengan individu yang terpengaruh hoaks dari kelas (I).
4. Jika seorang yang terpengaruh oleh satu hoaks (I) maka ada beberapa yang akan tersadar dan ke proses sadar atau pemulihan (R)
5. Terdapat beberapa individu di kelas (S) yang tervaksinasi sosial (memiliki literasi digital) yaitu kelas (V) yang kemudian akan kembali ke kelas (S)
6. Kematian alami dapat terjadi pada tiap kelas dengan laju sebesar μ .

Secara sederhana, alur penyebaran hoaks dan penanganannya dengan vaksinasi sosial menggunakan struktur kompartemen di Gambar 1, dengan $N = S + I + R + V$.



Gambar 1. Alur Penyebaran Hoaks dan Penanganannya dengan Vaksinasi Sosial

Parameter-parameter yang digunakan dalam pemodelan penyebaran hoaks dan penanganannya dengan vaksinasi sosial dapat di lihat pada Tabel 1.

Tabel 1 Deskripsi Parameter-parameter

Parameter	Deskripsi
μ	Angka kelahiran dan kematian (dianggap konstan dan seimbang dengan kematian/migrasi keluar)
β	Laju penularan hoaks (kontak efektif penyebaran hoaks per orang per kurun waktu tertentu)
γ	Laju pemulihan alami (orang yang sadar hoaks dan berhenti menyebarkannya)
α	Laju vaksinasi sosial (kampanye literasi digital yang memindahkan orang dari S ke V)
δ	Laju kehilangan kekebalan vaksin (orang yang vaksinasi sosialnya kadaluarsa atau terpengaruh hoaks dan kembali ke rentan)

Model matematika penyebaran hoaks dan penanganannya dengan vaksinasi sosial sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= \mu N - \beta S \frac{I}{N} - \alpha S + \delta V - \mu S \\
 \frac{dI}{dt} &= \beta S \frac{I}{N} - \gamma I - \mu I \\
 \frac{dR}{dt} &= \gamma I - \mu R \\
 \frac{dV}{dt} &= \alpha S - \delta V - \mu V
 \end{aligned} \tag{1}$$

Dengan $N = S + I + R + V$

Untuk mempermudah proses analisis titik ekuilibrium endemik dan kestabilan pada sistem persamaan (1), maka terlebih dahulu dilakukan proses penskalaan pada model tersebut atau bisa disebut *model scalling*. Diketahui bahwa $\dot{N} = 0$ dan misalkan $s = \frac{S}{N}$, $i = \frac{I}{N}$, $r = \frac{R}{N}$, dan $v = \frac{V}{N}$, sehingga diperoleh hasil penskalaan model matematika penyebaran hoaks dan penanganannya dengan vaksinasi sosial sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 \dot{s} &= \mu - \beta si - \alpha s + \delta v - \mu s \\
 \dot{i} &= \beta si - \gamma i - \mu i \\
 \dot{r} &= \gamma i - \mu r \\
 \dot{v} &= \alpha s - \delta v - \mu v
 \end{aligned} \tag{2}$$

Analisis Model

Dalam bidang epidemiologi matematika, bilangan reproduksi dasar (R_0) adalah rata-rata banyaknya individu rentan yang terinfeksi secara langsung oleh individu lain yang telah terinfeksi dan masuk ke dalam populasi yang seluruhnya masih rentan (Giesecke, 2021). Nilai R_0 yang diperoleh dapat mengindikasikan keadaan bagaimana suatu wabah (*epidemic*) mungkin terjadi. bilangan reproduksi dasar (R_0) pada model penyebaran hoaks dan penanganannya dengan vaksinasi sosial dicari dengan menggunakan metode yang dikembangkan oleh Perasso (Perasso, 2018)., bilangan reproduksi dasar (R_0) pada model ini adalah $\frac{\beta}{(\gamma + \mu)}$.

Selanjutnya dilakukan analisis terhadap model matematika pada sistem (2) untuk menentukan titik ekuilibrium. Untuk menentukan titik ekuilibriumnya, masing-masing persamaan pada sistem persamaan (2) dibuat menjadi nol

$$\begin{aligned}
 \dot{s} &= \mu - \beta si - \alpha s + \delta v - \mu s = 0 \\
 \dot{i} &= \beta si - \gamma i - \mu i = 0 \\
 \dot{r} &= \gamma i - \mu r = 0 \\
 \dot{v} &= \alpha s - \delta v - \mu v = 0
 \end{aligned} \tag{3}$$

Titik ekuilibrium bebas penyebaran hoaks (E^0) diperoleh dengan mengasumsikan tidak adanya individu yang terpengaruh hoaks ($i = 0, r = 0$). Saat $i = 0$, dari sistem persamaan (3) maka di

peroleh $r = 0$, $v = 0$, $i = 0$ dan $s = \frac{\mu}{\mu} = 1$. Akibatnya, diperoleh titik ekuilibrium bebas kecanduan penyebaran hoaks $E^0 = (1, 0, 0, 0)$.

Untuk memecahkan masalah model matematika penyebaran hoaks dan penanganannya dengan vaksinasi sosial, di mana keadaan terpengaruh hoaks secara terus menerus mengalami penyebaran dan penanganan dengan vaksinasi sosial, maka ditentukan titik ekuilibrium untuk kondisi tersebut yaitu $E^* = (s^*, i^*, r^*, v^*)$.

Langkah awal untuk mengidentifikasi titik ekuilibrium adalah menentukan $s = i = r = v = 0$, sehingga turunan pertamanya bernilai nol seperti yang telah dilakukan pada sistem persamaan (3). Sehingga di peroleh titik ekuilibrium endemik terpengaruh hoaks dengan menggunakan aplikasi Wolfram Mathematica adalah

$$\begin{aligned}s^* &= \frac{\gamma + \mu}{\beta} \\ i^* &= \mu \left(\frac{1}{\gamma + \mu} - \frac{\alpha + \delta + \mu}{\beta \delta + \beta \mu} \right) \\ r^* &= \gamma \left(\frac{1}{\gamma + \mu} - \frac{\alpha + \delta + \mu}{\beta \delta + \beta \mu} \right) \\ v^* &= \frac{\alpha(\gamma + \mu)}{\beta(\delta + \mu)}\end{aligned}$$

Analisis kestabilan ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks Jacobian yang diperoleh melalui metode linearisasi sistem di sekitar titik-titik ekuilibrium dari sistem persamaan (1). Jika terdapat nilai eigen dengan nilai positif, titik ekuilibrium tidak stabil dan jika semua nilai eigen negatif, maka titik ekuilibrium stabil. Nilai eigen sendiri didapat dari akar persamaan karakteristik suatu matriks Jacobi.

Teorema. Jika $R_0 < 1$, maka titik ekuilibrium bebas penyebaran hoaks (E^0) stabil asimtotik lokal.

Bukti

Pertama, ditentukan matriks Jacobi J dari sistem persamaan (2). Berikut adalah matriks Jacobi untuk model matematika tersebut

$$J = \begin{bmatrix} -\beta i - \alpha - \mu & -\beta s & 0 & \delta \\ \beta i & \beta s - \gamma - \mu & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & -\delta - \mu \end{bmatrix}$$

Dengan melakukan substitusi nilai $E^0 = (1, 0, 0, 0)$ sehingga diperoleh matriks Jacobi $J(E^0)$ sebagai berikut:

$$J(E^0) = \begin{bmatrix} -\alpha - \mu & -\beta & 0 & \delta \\ 0 & \beta - \gamma - \mu & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & -\delta - \mu \end{bmatrix}$$

Untuk mendapatkan nilai eigen λ matriks $J(E^0)$, diperoleh dari persamaan: $\det[\lambda I - J(E^0)] = 0$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\alpha - \mu & -\beta & 0 & \delta \\ 0 & \beta - \gamma - \mu & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & -\delta - \mu \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \lambda + \alpha + \mu & \beta & 0 & -\delta \\ 0 & \lambda - \beta + \gamma + \mu & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma & \lambda + \mu & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 & \lambda + \delta + \mu \end{bmatrix} = 0$$

Selanjutnya nilai eigen akan dicari dengan metode Ekspansi Kofaktor sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
(\lambda + \mu) \begin{vmatrix} \lambda + \alpha + \mu & \beta & -\delta \\ 0 & \lambda - \beta + \gamma + \mu & 0 \\ -\alpha & 0 & \lambda + \delta + \mu \end{vmatrix} &= 0 \\
(\lambda + \mu)(\lambda - \beta + \gamma + \mu) \begin{vmatrix} \lambda + \alpha + \mu & -\delta \\ -\alpha & \lambda + \delta + \mu \end{vmatrix} &= 0 \\
(\lambda + \mu)(\lambda - \beta + \gamma + \mu)[(\lambda + \alpha + \mu)(\lambda + \delta + \mu) - \alpha\delta] &= 0 \\
(\lambda + \mu)(\lambda - \beta + \gamma + \mu)(\lambda + \mu)(\alpha + \delta + \lambda + \mu) &= 0
\end{aligned}$$

Dari persamaan karakteristik tersebut diperoleh

$$\lambda_1 = -\mu$$

$$\lambda_2 = \beta - \gamma - \mu$$

$$\lambda_3 = -\alpha - \delta - \mu$$

$\lambda_1, \lambda_2 < 0$ Kemudian akan dibuktikan bahwa λ_2 bernilai negatif untuk $R_0 < 1$

$$R_0 < 1$$

$$\frac{\beta}{(\gamma + \mu)} < 1$$

$$\beta < \gamma + \mu$$

$$\beta - (\mu + \gamma) < 0$$

$$\lambda_2 < 0$$

Maka terbukti bahwa λ_2 bernilai negatif.

Untuk $R_0 < 1$ maka dapat dilihat persamaan karakteristiknya memiliki tiga akar negatif. Hal ini berarti bahwa titik ekuilibrium bebas penyakit (E^0) stabil asimtotik lokal.

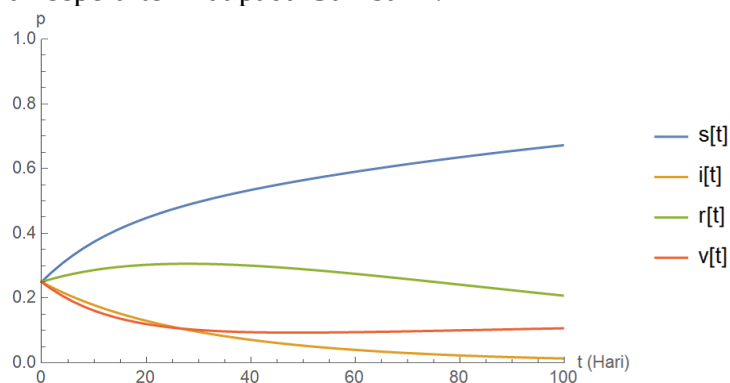
Simulasi Numerik

Kestabilan Saat $R_0 < 1$

Tabel 2. Nilai Parameter $R_0 < 1$

Paremater	Nilai
μ	0,01
β	0,02
γ	0,03
α	0,01
δ	0,05

Berdasarkan nilai-nilai parameter pada Tabel 1 maka diperoleh bilangan reproduksi dasar $R_0 = 0.5$, untuk simulasi ini dilakukan beberapa simulasi untuk nilai awal yang berbeda. . Di samping itu, dibagi menjadi beberapa kasus untuk melihat kesesuaian hasil simulasi numerik dengan analisis yang telah dilakukan terhadap titik ekuilibrium. Adapun syarat awal dari simulasi numerik yang dilakukan adalah $s(0) = 0,25$, $i(0) = 0,25$, $r(0) = 0,25$, $v(0) = 0,25$ dalam waktu 100 hari. Adapun hasil numerik yang dilakukan seperti terlihat pada Gambar 2.



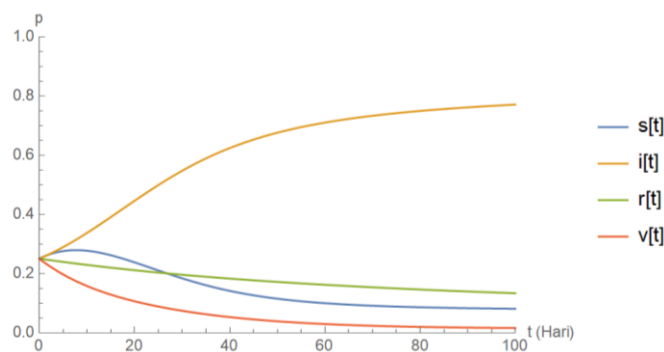
Gambar 2. Dinamik model untuk $R_0 < 1$

Pada Gambar 2, terlihat bahwa dari hasil simulasi numerik untuk $R_0 < 1$ yang dilakukan menunjukkan adanya kecenderungan dari sistem menuju titik ekuilibrium bebas penyebaran hoaks E^0 . Hal ini sesuai dengan analisis kestabilan yang telah dilakukan bahwa titik ekuilibrium bebas penyebaran hoaks E^0 stabil asimtotis lokal untuk $R_0 < 1$.

Kestabilan Saat $R_0 > 1$

Paremater	Nilai
μ	0,01
β	0,15
γ	0,001
α	0,01
δ	0,05

Simulasi numerik saat $R_0 > 1$, untuk nilai parameter seperti yang tercantum pada Tabel 3. yang diambil secara acak, dimana memiliki nilai $R_0 = 1,82$ dan memiliki sistem numerik yang berbeda dengan memberikan nilai awal tertentu simulasi numerik saat $R_0 > 1$ yang dihasilkan pada model penyebaran rokok elektrik.



Gambar 3. Dinamik model untuk $R_0 > 1$

Gambar 3 menunjukkan bahwa seiring dengan jalannya waktu, jumlah individu pada kelas i mengalami peningkatan yang cukup tinggi dalam rentang waktu kurang dari 1 tahun dan stabil menuju titik tetapnya pada kurun waktu lebih dari 2 tahun. Hal ini menunjukkan bahwa setelah melewati 2 tahun, penyebaran rokok elektrik meningkat secara signifikan, kejadian ini dimungkinkan penyebaran pada pengguna rokok elektrik yang dilakukan penjual maupun pemakai selalu berhasil sehingga pemakai rokok elektrik meningkat secara drastis dan cepat.

Penanganan Hoaks dengan Vaksinasi Sosial

Bilangan reproduksi dasar dengan vaksinasi (R_v) = $\frac{\beta(\mu+\delta)}{(\gamma+\mu)(\mu+\delta+\alpha)}$, yang menginterpretasikan vaksinasi sosial mengurangi R_0 dengan faktor $\frac{\mu+\delta}{\mu+\delta+\alpha}$ dimana setiap kenaikan α akan menurunkan R_v secara proposional. Untuk menghilangkan penyebaran hoaks atau $R_v < 1$, maka diperlukan α yang cukup besar, ini menunjukkan bahwa agar lebih optimal dalam mengurangi penyebaran maka selain meningkatkan α , nilai β juga harus ditekan. Jadi program vaksinasi sosial yang masif dapat meniadakan efek penyebaran hoaks jika intensitasnya sebanding dengan laju penularan.

PEMBAHASAN

Berdasarkan hasil penelitian, model matematika penyebaran hoaks dan penanganannya dengan vaksinasi sosial yang dibentuk dalam penelitian ini menggunakan pendekatan epidemiologi model *SIRV*. Pemodelan ini menggunakan struktur kompartemen yang berarti memiliki bagian per bagian dan beberapa istilah yang mungkin tergolong baru, namun dapat ditemukan padanannya dalam pemodelan di bidang epidemiologi. Model matematika penyebaran hoaks dan penanganannya dengan vaksinasi sosial adalah dengan: $N = S + I + R + V$. Berdasarkan model yang terbentuk diperoleh penyelesaian berupa titik ekuilibrium bebas penyebaran hoaks $E^0 = (1,0,0,0)$ dan titik ekuilibrium endemik penyebaran hoaks dan penanganannya dengan vaksinasi sosial adalah $E^* = (s^*, c^*, i^*, r^*)$. Dari hasil analisis yang dilakukan, titik ekuilibrium E^0 bersifat stabil asimtotis lokal untuk $R_0 < 1$ dan dari hasil simulasi numerik titik ekuilibrium E^* terindikasi bersifat stabil asimtotis lokal untuk nilai $R_0 > 1$.

SIMPULAN

Berdasarkan asumsi-asumsi yang dibentuk, dapat diperoleh kesimpulan dari model matematika penyebaran hoaks dan penanganannya dengan vaksinasi sosial yaitu:

1. Model matematika penyebaran hoaks dan penanganannya dengan vaksinasi sosial adalah:

$$\frac{dS}{dt} = \mu N - \beta S \frac{I}{N} - \alpha S + \delta V - \mu S$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta S \frac{I}{N} - \gamma I - \mu I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R$$

$$\frac{dV}{dt} = \alpha S - \delta V - \mu V$$

Dengan $N = S + I + R + V$

2. Dari model yang terbentuk diperoleh penyelesaian berupa titik ekuilibrium bebas penyebaran hoaks $E^0 = (1,0,0,0)$ dan titik ekuilibrium endemik penyebaran hoaks dan penanganannya dengan vaksinasi sosial adalah $E^* = (s^*, c^*, i^*, r^*)$. Dari hasil analisis yang dilakukan, titik ekuilibrium E^0 bersifat stabil asimtotis lokal untuk $R_0 < 1$ dan dari hasil simulasi numerik titik ekuilibrium E^* terindikasi bersifat stabil asimtotis lokal untuk nilai $R_0 > 1$.

Berdasarkan analisis yang dilakukan terhadap tingkat sensitivitas parameter pada model maka strategi optimasi yang dapat dilakukan yaitu dengan meningkatkan α yaitu kampanye literasi digital massal, minimalkan δ yaitu vaksinasi sosial berkelanjutan, tidak sekali saja dan pantau β dengan pemblokiran hoaks di media sosial.

DAFTAR RUJUKAN

- Ahlina, N., Wahyudi, A., Sapuguh, I., & Rosalinda, A. S. (2024). *A mathematical model for predicting the spread and detection of rumors in online communities*. 15(6), 291–296.
- Cao, B., Guan, G., Shen, S., & Zhu, L. (2023). Dynamical behaviors of a delayed SIR information propagation model with forced silence function and control measures in complex networks. *European Physical Journal Plus*, 138(5), 1–30. <https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-023-04005-1>
- Giesecke, J. (2021). *Modern Infectious Disease Epidemiology Fourth Edition*. Taylor & Francis Group.
- Ibrahim, J. (2024). Mathematical Modeling of the Spread of False Information within Social Media. *Ilorin Journal of Science*, 145, 139–145. <https://doi.org/10.54908/iljs.fapscon.2024.11.03.1018>
- Lewandowsky, S., & Van Der Linden, S. (2021). Misinformation and Fake News Through

- Inoculation and Prebunking . *European Review of Social Psychology* , 32 (2), 348-384 .
University of Bristol - Explore Bristol Research. *European Review of Social Psychology*, 32, 348–384.
- Lynch, S. (2019). *Dynamical Systems With Applications Using Mathematica* (3rd ed.).
- Olsder, G. J., & Woude, J. W. van der. (2017). *Mathematical Systems Theory*. Delft University Press.
- Pennycook, G., & Rand, D. G. (2021). The Psychology of Fake News. *Trends in Cognitive Sciences*, 25(5), 388–402. <https://doi.org/10.1016/j.tics.2021.02.007>
- Perasso, A. (2018). An Introduction to The Basic Reproduction Number in Mathematical Epidemiology. *ESAIM: Proceedings and Surveys*, 62(September), 123–138. <https://doi.org/10.1051/proc/201862123>
- Roozenbeek, J., & van der Linden, S. (2024). The psychology of misinformation. *The Psychology of Misinformation*, 1–182. <https://doi.org/10.1017/9781009214414>
- Ross, S. L. (2018). *Differential equations 3rd edition Shepley L.Ross.pdf* (pp. 416–419).
- Safira, H. (2025). Urgensi Literasi Digital Bagi Media Dan Masyarakat Dalam Mencegah Hoaks (Pendekatan Preventif dan Edukatif dalam Konteks Hukum Media). *Intercode (Jurnal Ilmu Komunikasi)*, 5(2), 34–42. <https://doi.org/10.36269/ire.v5i2.3701>
- Sarjito, A. (2024). Hoaks, Disinformasi, dan Ketahanan Nasional: Ancaman Teknologi Informasi dalam Masyarakat Digital Indonesia. *Journal of Governance and Local Politics (JGLP)*, 6(2), 175–186. <https://doi.org/10.47650/jglp.v6i2.1547>
- Setiawan, L. I., & Mungkasi, S. (2021). *Penyelesaian Model Epidemi SIR Menggunakan Metode Runge-Kutta Orde Empat Dan Metode Adams-Bashforth-Moulton*. 18(2), 55–61.
- Sinaga, L. P., Kartika, D., & Nasution, H. (2021). *Pengantar Sistem Dinamik* (T. Trisnawati (ed.)). Amal Insani Publisher.
- Van Den Driessche, P., & Watmough, J. (2016). Reproduction Numbers and Sub-threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission. *Mathematical Biosciences*, 180(1–2), 29–48. [https://doi.org/10.1016/S0025-5564\(02\)00108-6](https://doi.org/10.1016/S0025-5564(02)00108-6)
- Vosoughi, S., Roy, D., & Aral, S. (2018). The spread of true and false news online. *Science*, 359(6380), 1146–1151. <https://doi.org/10.1126/science.aap9559>
- Widowati, & Sutimin. (2020). *Buku Ajar Pemodelan Matematika*. FMIPA Universitas Diponegoro.
- Xu, Y., Mei, R., Yang, Y., & Kong, Z. (2019). Modeling and Analysis of Rumor Spreading with Social Reinforcement Mechanism. *Advances in Mathematical Physics*, 2019. <https://doi.org/10.1155/2019/7241021>
- Zhao, L., Wang, J., Chen, Y., Wang, Q., Cheng, J., & Cui, H. (2021). SIHR rumor spreading model in social networks. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 391(7), 2444–2453. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2011.12.008>

