PROSIDING DISKUSI PANEL NASIONAL PENDIDIKAN MATEMATIKA

Original Research

Penyelesaian Numerik Persamaan Differensial Biasa Orde Satu dan Orde Dua Berbasis *Graphical Unit Interface* MATLAB

Alpi Mahisha Nugraha & Nurullaeli
Program Studi Teknik Informatika, FTIK, Universitas Indraprasta PGRI Jakarta

INFO ARTICLES

Key Words:

PDB first and second order; Numerical solutions; GUI; MATLAB

***Abstract*:** Mathematical formulas are an alternative way to look a natural phenomenon that happened in the world, some natural phenomenon can be approached with the Ordinary Differential Equation (ODE) in analysing them. ODE 1st or 2nd order has been trusted to be able analyse natural phenomenon such as falling objects, the organism or population growing, and the movement of stocks and their derivatives, etc. Numerical solutions in ODE 1st or 2nd order, like as Runge-Kutta 2nd, Runge-Kutta 4th, Euler, and Euler Modified can be used to approaches ODE problems powerfull, which are sometimes quite complicated when solved analytically. The numerical solutions are presented in MATLAB-based Graphical Unit Interface (GUI) is expexted can be one of the interesting media to look the natural phenomenon.

Abstrak: Formula matematika adalah salah satu alternatif cara untuk melihat suatu fenomena alam ataupun kehidupan yang terjadi di dunia, beberapa fenomena alam atau kehidupan dapat didekati dengan Persamaan Differensial Biasa (PDB) dalam menganalisanya. PDB baik orde satu atau dua telah dipercaya dapat menganalisa fenomena alam seperti benda jatuh, pertumbuhan suatu organisme sampai dapat menganalisa fenomena kehidupan seperti pertumbuhan penduduk dan pergerakan saham berserta turunannya dan fenomana lainnya. Penyelesaian numerik dari PDB baik orde satu atau orde dua seperti Runge-Kutta 2nd, Runge-Kutta 4th, Euler, dan Euler Modified menjadi pendekatan dalam menyelesaikan PDB yang terkadang cukup rumit jika diselesaikan dengan analitik. Penyelesaian numerik yang disajikan dalam *Graphical Unit Interface* (GUI) berbasis MATLAB diharapkan menjadi salah satu media pembelajaran analisa yang menarik dalam melihat suatu fenomena alam dan kehidupan.

Correspondence Address: B. Simatupang, Jl. Nangka Raya No.58 C, RW.5, Tanjung Barat, Kec. Jagakarsa, Kota Jakarta Selatan, Daerah Khusus Ibukota Jakarta, Kode pos: 12530, Indonesia; e-mail: alpi.mahisha@gmail.com

How to Cite (APA 6th Style): Nugraha, A. M. & Nurullaeli. (2023). Penyelesaian Numerik Persamaan Differensial Biasa Orde Satu dan Orde Dua Berbasis *Graphical Unit Interface* MATLAB. *Prosiding Diskusi Panel Nasional Pendidikan Matematika*, 267-274.

PENDAHULUAN

Persamaan differensial merupakan persamaan yang identik dengan perubahan atau *derivative*. Di sisi lain, beberapa fenomena alam yang terjadi, erat sekali dengan perubahan sehingga fenomena tersebut sering kali dianalisa dengan pendekatan persamaan differensial sebagai alternatif pendekatan matematika. Penggunaan persamaan differensial dalam menganalisis fenomena alam bukan lah hal yang baru dilakukan, beberapa pendekatan seperti pada perancangan jembatan untuk melihat kekuatan tali jembatan gantung (Pratiwi et al., 2021), persebaran aliran panas pada suatu plat konduktor (Mubaroq & Saptaningrum, 2022), fenomena pertumbuhan jumlah penduduk yang mengalami perubahan tiap waktunya (Rozikin et al., 2021), estimasi jumlah penduduk (Nuraeni, 2017), dan simulasi jumlah debit air (Efendi & Sagita, 2021), fenomena-fenomena tersebut didekati dengan menggunakan persamaan differensial.

Salah satu bentuk persamaan differensial yang sering digunakan sebagai analogi beberapa fenomena alam yang terjadi adalah Persamaan Differensial Biasa (PDB) berorde satu atau pun dua yang memiliki bentuk persamaan yang cukup beragam dari persamaan yang cukup sederhana hingga rumit. PDB dapat menjadi salah satu alternatif matematik yang dapat digunakan untuk menganalisis suatu persoalan alam, seperti penyelesaian dalam kasus rangkaian listrik (Rijoly & Rumlawang, 2020), transport suatu unsur dalam aliran sungai (Fatimah, 2007), dan banyak lainnya. Dalam menyelesaiakan PDB banyak cara yang dapat dilakukan bergantung pada pendekatan yang akan digunakan dan kesesuaian terhadap bentuk persamaan yang dihadapi. Mengingat terdapat bentuk PDB yang cukup sederhana hingga bentuk PDB yang rumit.

Salah satu pendekatan yang dapat dilakukan dalam menyelesaikan PDB adalah dengan menggunakan pendekatan metode katarestik yang dapat dilakukan pada persamaan differensial linear (Alfionita & Zulakmal, 2016), pendekatan metode Adams Basforth Moulton pada persamaan diferensial linear homogen dengan koefisien konstan dan persamaan diferensial untuk koefisien fungsi (Apriliajasni et al., 2019), serta pendekatan PDB yang bersifat kompleks dengan menggunakan pendekatan pada analisa syarat batasnya, dan masih banyak pendekatan lainnya. Namun, meskipun PDB dapat digunakan sebagai formula analogi dari fenomena alam. PDB masih saja menjadi momok untuk beberapa siswa dan mahasiswa selama mempelajari matematika (Ningsih & Rohana, 2018), bentuk persamaan yang beragam dan metode penyelesaian yang beragam juga menjadi salah satu faktor dalam kesulitan untuk menyelesaikan PDB.

Menghadapi kesulitan tersebut biasanya PDB dapat diselesaikan dengan metode numerik, metode numerik tentu saja memiliki kelebihan dan kekurangan tersendiri. Kelebihannya adalah bentuk persamaannya menjadi galat sehingga bentuk PDB seperti apapun dapat diselesaikan, namun kekurangannya diperlukan jumlah pengulangan atau iterasi untuk menghasilkan solusi yang akurat laiaknya solusi analitik yang bergantung terhadap bentuk dari PDB yang diselesaikan (Pandia & Sitepu, 2021). Sehingga metode numerik dirasa merupakan alternatif pengerjaan yang *powerfull* dalam menyelesaikan PDB.

Berdasarkan permasalahan tersebut, peneliti beranggapan diperlukan suatu aplikasi yang *friendly* dalam menganalisi suatu permasalahan PDB baik orde satu atau pun dua. Peneliti mencoba mengemas aplikasi tersebut berbasis MATLAB dengan metode penyelesaian numerik seperti Runge-Kutta 2^{nd}, Runge-Kutta 4^{th}, Euler, dan Euler Modified. Penggunaan metode numerik tersebut bukanlah hal baru terlebih lagi pada kalangan peneliti matematika, penyelesaian numerik yang dilakukan untuk menganalisa bentuk aliran panas (Mubaroq & Saptaningrum, 2022) dan lainnya. Namun, fokusnya pada fenomena tertentu menjadi salah satu keterbatasan dai beberapa penelitian sebelumnya. Sehingga jika siswa atau mahasiswa berkeinginan untuk melihat solusi PDB yang lain diperlukan analisa lainnya. Sehingga peneliti beranggapan diperlukan aplikasi MATLAB yang dapat menyelesaiakan PDB untuk bentuk apapun, salah satunya adalah penggunaan *Graphical Unit Interface* (GUI) dengan bentuk persamaannya merupakan input dari aplikasi tersebut.

METODE

Metode penyelesaian persamaan differensial biasa (PDB) orde satu dan orde dua dilakukan dengan metode numerik, yakni: metode numerik Runge-Kutta 2nd, Runge-Kutta 4th, Euler, dan Euler Modified dengan persamaan numerik yang sederhana (Sihombing & Dahlia, 2018). Pada penelitian ini, media yang digunakan berupa *Graphical Unit Interface* (GUI) berbasis MATLAB yang dapat menyelesaikan PDB secara numerik dengan penggunaan GUI yang *friendly*. Pada penyelesaian PDB secara numerik diperlukan beberapa besaran awal untuk menyelesaikannya baik pada PDB orde satu atau pun orde dua, besaran seperti kondisi awal inilah yang akan menjadi input pada GUI MATLAB yang dirancang.

Pada penelitian ini metode yang dilakukan oleh peneliti dibagi menjadi tiga tahapan, yakni: Pertama, penyusunan penyelesaian persamaan numerik yang digunakan sebagai solusi dari PDB baik orde satu atau pun orde dua. Kedua, perancangan GUI MATLAB yang disesuaikan dengan persamaan yang diinginkan. Ketiga, mengevaluasi hasil numerik dengan solusi analitik untuk persamaan yang PDB orde satu atau pun dua yang sederhana. GUI MATLAB yang dirancang merupakan aplikasi yang dapat menyelesaikan PDB berbentuk x(t) dan turunan pertamanya v(t) beserta turunan keduanya. Adapun bentuk persamaan numerik untuk PDB orde dua dari ke-4 metode yang digunakan adalah sebagai berikut:

1) Metode numerik Runge-Kutta 2nd

```
t(i+1) = t(i) + h;
k1v = h.* df1(t(i),v(i),x(i));
k1x = h.* df2(t(i),v(i),x(i));
k2v = h.* df1(t(i)+h/2,v(i)+k1v/2,x(i)+k1x/2);
k2x = h.* df2(t(i)+h/2,v(i)+k1v/2,x(i)+k1x/2);
v(i+1) = v(i)+k2v;
x(i+1) = x(i)+k2x;
```

2) Metode numerik Runge-Kutta 4th

```
t(i+1)=t(i)+h;
k1v=h*df1(t(i),v(i),x(i));
k1x=h*df2(t(i),v(i),x(i));
k2v=h*df1(t(i)+h/2,v(i)+k1v/2,x(i)+k1x/2);
k2x=h*df2(t(i)+h/2,v(i)+k1v/2,x(i)+k1x/2);
k3v=h*df1(t(i)+h/2,v(i)+k2v/2,x(i)+k2x/2);
k3x=h*df2(t(i)+h/2,v(i)+k2v/2,x(i)+k2x/2);
k4v=h*df1(t(i)+h,v(i)+k3v,x(i)+k3x);
k4x=h*df2(t(i)+h,v(i)+k3v,x(i)+k3x);
v(i+1)=v(i)+(k1v+2*k2v+2*k3v+k4v)/6;
x(i+1)=x(i)+(k1x+2*k2x+2*k3x+k4x)/6;
```

3) Metode numerik Euler

```
t(i+1)=t(i)+h;
v(i+1)=v(i)+h.*df1(t(i),v(i),x(i));
x(i+1)=x(i)+h.*df2(t(i),v(i),x(i));
```

4) Metode numerik Euler Modified

```
t(i+1)=t(i)+h;
v_new=v(i)+h.*df1(t(i),v(i),x(i));
v(i+1)=v(i)+h.*df1(t(i),v_new,x(i));
x_new=x(i)+h.*df2(t(i),v(i),x(i));
x(i+1)=x(i)+h.*df2(t(i),v(i),x_new);
```

Sedangkan untuk persamaan numerik PDB orde 1 sebagai berikut:

1) Metode Runga-Kutta 2nd:

```
x(i+1) = x(i) + h;
k1y = h.* df1(x(i),y(i));
```

```
k2y = h.* df1(x(i)+h/2,y(i)+k1y/2);
y(i+1) = y(i)+k2y;
```

2) Metode Runga-Kutta 4th:

```
x(i+1)=x(i)+h;
k1y=h*df1(x(i),y(i));
k2y=h*df1(x(i)+h/2,y(i)+k1y/2);
k3y=h*df1(x(i)+h/2,y(i)+k2y/2);
k4y=h*df1(x(i)+h,y(i)+k3y);
y(i+1)=y(i)+(k1y+2*k2y+2*k3y+k4y)/6;
```

3) Metode Euler:

```
x(i+1) = x(i)+h;
y(i+1) = y(i)+h.*df1(x(i),y(i));
```

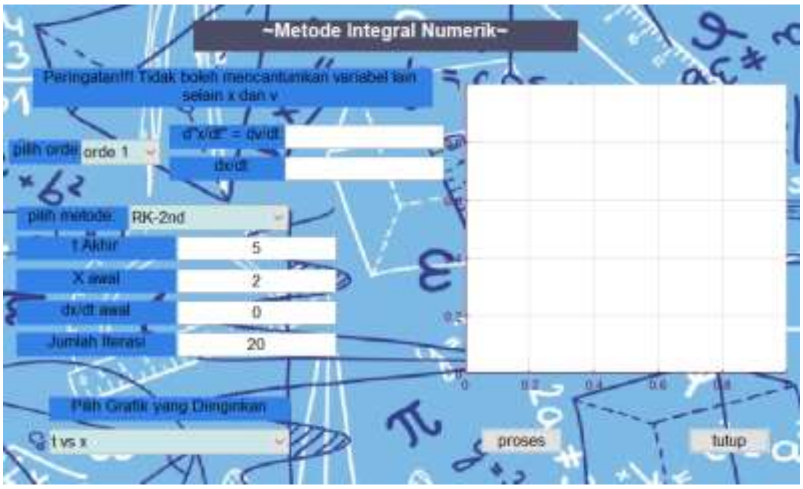
4) Metode Euler Modified:

```
x(i+1) = x(i)+h;
y_new = y(i)+h.*df1(x(i),y(i));
y(i+1) = y(i)+h.*df1(x(i),y_new);
```

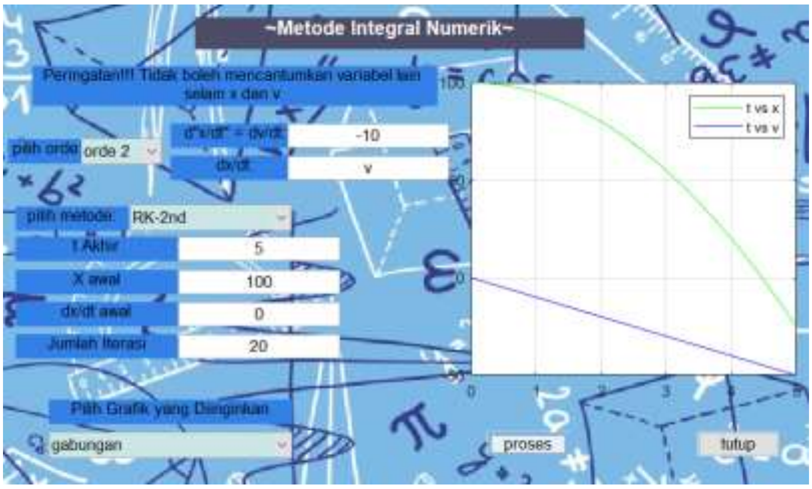
Pada persamaan numerik yang digunakan terdapt input df1 dan df2 yang merupakan input PDB yang akan dianalisa. Selain fungsi dari PDBnya, persamaan numerik memerlukan beberapa input lainnya seperti nilai awal dari x, v (turunan pertama x), t akhir dan jumlah iterasi yang diinginkan. Perbedaan ke-4 metode numerik tersebut terletak pada bentuk pencacahan persamaan, mengingat persamaan diferensial merupakan persamaan derivatif atau pencacahan, sehingga semakin banyak pencacahan dalam satu kali iterasi akan menghasilkan hasil yang lebih presisi terhadap solusi analitik. Meskipun begitu, dengan jumlah iterasi yang banyak mestinya ke-4 metode numerik tersebut dapat menghasilkan solusi yang sama.

HASIL

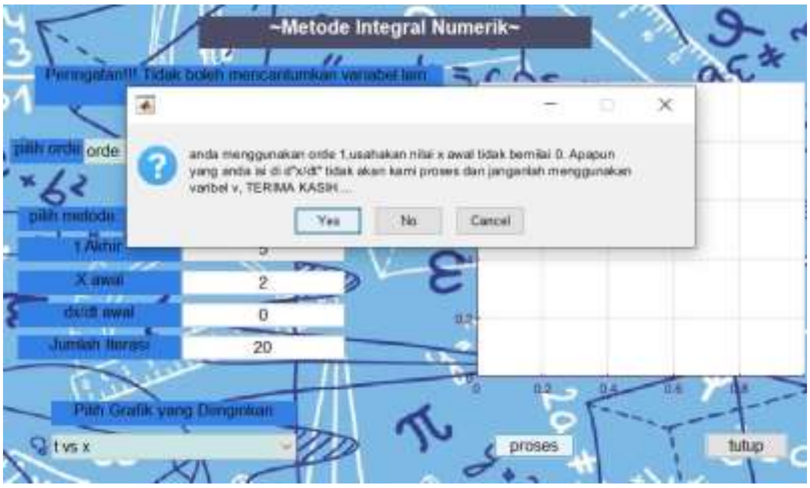
Aplikasi *Graphical Unit Interface* (GUI) MATLAB yang dirancang menggunakan pilihan popupmenu untuk memudahkan pengguna aplikasi dalam menganalisa Persamaan Differensial Biasa (PDB) yang diinginkan. Terlihat tampilan GUI yang dirancang pada Gambar 1 dengan input fungsi PDB sembarang dan output yang dihasilkan adalah bentuk grafik dari PDB tersebut. Untuk mengevalusi presisi aplikasi digunakan pendekatan fenomena benda jatuh yang terlihat pada Gambar 2, dan pad Gambar 3, terlihat "*question dialogue*" yang diharapkan dapat memepermudah siswa atau mahasiswa saat menggunakan aplikasi.



Gambar 1. Tampilan GUI MATLAB
sumber: peneliti



Gambar 2. Evaluasi GUI MATLAB pada fenomena benda jatuh



Gambar 3. *Question Dialogue* pada GUI MATLAB
sumber: peneliti

PEMBAHASAN

Graphical Unit Interface (GUI) berbasis MATLAB merupakan salah satu media alternatif pembelajaran. Peniliti menggunakan GUI MATLAB sebagai media aplikasi untuk menganalisa Persamaan Diferensial Biasa (PDB) dengan metode numerik Runge-Kutta 2nd, Runge-Kutta 4th, Euler, dan Euler Modified. Keempat metode numerik tersebut memilki perbedaaan pada cara mencacah persamaan diferensial. Tampilan GUI yang dirancang terligat pada Gambar 1, GUI memerlukan input fungsi dari turunan pertama dan turunan kedua x(t) untuk penyelesaian PDB orde dua, dan input fungsi dari tutunan pertama x(t) untuk penyelesaian PDB orde satu. Fungsi PDB merupakan input yang akan didefenisikan sebagai df1 dan df2 pada MATLAB, dan program MATLAB akan menyelesaikan persamaan tersebut sesuai pilihan popupmenu yang dipilih oleh pengguna. Untuk menyelesaikan PDB tersebut, diperlukan besaran input lainnya seperti nilai akhir t, nilai awal x, nilai awal turunan x dan jumlah iterasi.

Pada Gambar 2 GUI MATLAB yang dirancang dipergunakan untuk menganalisa fenomena alam yakni benda jatuh bebas. Jatuh bebas adalah pergerakan benda yang tertarik oleh percepatan gravitasi bumi dengan kondisi awal benda dalam keadaan diam. Pada input terlihat nilai nilai x awal 100, yang artinya benda jatuh pada ketinggian 100meter dan nilai awal turunanan pertama x bernilai nol yang mengindikasikan kecepatan (turunan pertama dari posisi) bernilai nol. Pada input persamaan fungsi dari turunan kedua x bernilai -10, dan turunan pertama x bernilai v, fungsi v pada GUI MATLAB diperbolehkan dikarenakan peneliti mendefinisikan turunan pertama dari x adalah variabel v. Turunan kedua x pada fenomena ini adalah percepatan dimana benda jatuh bebas (jatuh tanpada adanya gesekan udara) mengalami percepatan bernilai -10 m/s^2, dengan tanda minus karena percepatan merupakan besaran yang memiliki arah menuju pusat bumi.

Setelah input persamaan dan variabel yang dibutuhkan dan memilih metode numerik yang diinginkan, pengguna dapat melihat solusi persamaan numerik dalam bentuk output grafik, dengan pilihan x terhadap t, v (turunanan pertama x) terhadap t atau pun gabungan kedua grafik tersebut. Hasil yang terlihat pada Gambar 2, menjelaskan bahwa posisi benda akan jatuh dengan kecepatan yang semakin kencang (semakin negatif) namun posisi benda yang jatuh berkurang (turun) sangat cepat untuk perubahan t yang besar. Hasil output GUI MATLAB ini sesuai dengan fenomena dari benda jatuh bebas. Tidak hanya fenomena benda jatuh bebas aplikasi ini dapat digunakan untuk menganalisa fenomena alam lainnya. Dikarenakan PDB yang digunakan merupakan input dari aplikasi sehingga pengguna tidak terbatasi pada hanya pada beberapa analogi saja.

Mengingat perlunya kecakapan pemahaman mengenai fenomena alam untuk menganalogikannya ke dalam bentuk PDB, sehingga GUI MATLAB dirancang memiliki *question dialogue* untuk mengarahkan pengguna agar betuk persamaan dapat diselesaikan. Terlihat pada Gambar 3, adanya *question dialogue* untuk mempertanyakan dan atau menyarankan pengguna dalam menggunakan aplikasi dalam menyelesaikan PDB orde satu. Saran yang muncul akan berbeda ketika pengguna aplikasi memiliki popupmenu penyelesaian PDB orde dua. Ketika saran tersebut tidak diindahkan atau dilarang maka aplikasi tidak akan melanjutkan atau mengeksekusi persamaan tersebut.

Perancangan GUI MATLAB yang *friendly* ini bertujuan agar pengguna tidak asal dalam mengisi input sehingga hasil yang diinginkan sesuai dengan fenomena yang sedang dianalisa pengguna. Sayangnya, perancangan GUI MATLAB ini memeliki keterbatasan pada bentuk PDB dengan dimensi banyak, dan beberapa kekurangan lainnya seperti keragaman metode numerik yang digunakan dan lainnya. Selain itu, diperlukan juga uji coba terhadap siswa atau mahasiswa dalam menggunakan aplikasi dalam menyelesaikan PDB sehingga dapat dievaluasi tingkat efisiensi dan efektivitas penggunaan GUI MATLAB sebagai media alternatif dalam mempelajari PDB baik secara kuantitatif atau pun kualitatif.

SIMPULAN

Penggunaan persamaan numerik pada Persamaan Differensial Biasa (PDB) berbasis GUI MATLAB menjadi salah satu metode dan media pembelajaran untuk mempermudah menganalisa suatu fenomena alam yang beranalogi dengan PDB. Metode numerik Runge-Kutta 2^{nd}, Runge-Kutta 4^{th}, Euler, dan Euler Modified dalam menganalisa PDB dirasa cukup *powerfull* untuk bentuk persamaan baik yang sederhana sampai yang rumit. Perbedaan ke-4 metode numerik tersebut terletak pada cara atau metode untuk mencacah persamaan differensial menjadi potongan-potongan kecil, namun perbedaan tersebut dapat tertutupi oleh jumlah iterasi yang cukup banyak. PDB memang seringkali menjadi formula matematika yang digunakan untuk melihat fenomena alam yang terjadi dan cukup disayangkan jika siswa atau mahasiswa tidak begitu tertarik terhadap PDB sebagai formula yang dapat menganalogikan beberapa fenomena tersebut. Sayangnya, pada penelitian ini tidak dilakukan pengujian terhadap siswa atau mahasiswa untuk melihat keefektifan dan efisiensi terhadap GUI MATLAB sebagai media pembelajaran. Sehingga diperlukan pengujian baik secara kuantitiatif atau pun kualitatif yang bertujuan untuk melihat perlunya beberapa pengembangan aplikasi seperti pada jenis persamaan differensial, dimensi persamaan dan metode numerik lainnya.

DAFTAR RUJUKAN

Alfionita, F. R., & Zulakmal. (2016). Penyelesaian Persamaan Diferensial Tunda Linier Orde 1 dengan Metode Karakteristik. *Jurnal Matematika UNAND*, *5*(2), 45–49.

Apriliajasni, N., Gunawan, G., & Ramdani, Y. (2019). Solusi Persamaan Diferensial Orde Dua Homogen Dengan Koefisien Fungsi. *Prosiding Matematika*, *5*(2), 69–74.

Efendi, R., & Sagita, D. (2021). Penerapan Sistem Persamaan Diferensial Linier pada Simulasi Debit Air pada Pipa. *JMPM: Jurnal Material Dan Proses Manufaktur*, *5*(1), 10–17.

Fatimah. (2007). Simulasi Model Transpor Fosfor pada Aliran Sungai Menggunakan Persamaan Diferensial Orde Satu. *Jurnal Teknologi Proses: Media Publikasi Karya Ilmiah Kimia*, *6*(1), 10–16.

Mubaroq, M. R., & Saptaningrum, J. S. E. (2022). Analisis Error Pada Jawaban Numerik Metode FTCS Pada Persamaan Aliran Panas. *Prosiding Seminar Nasional Lontar Physics Forum V1 2022*, *2587*(2021), 43–48.

Ningsih, Y. L., & Rohana, R. (2018). Pemahaman Mahasiswa Terhadap Persamaan Diferensial Biasa Berdasarkan Teori Apos. *Jurnal Penelitian Dan Pembelajaran Matematika*, *11*(1). https://doi.org/10.30870/jppm.v11i1.2995

Nuraeni, Z. (2017). Aplikasi persamaan diferensial dalam estimasi jumlah populasi. *Delta: Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika*, *5*(1), 9–16.

Pandia, W., & Sitepu, I. (2021). Penentuan Galat Persamaan Diferensial Biasa Orde 1 dengan Metode Numerik. *Jurnal Mutiara Pendidikan Indonesia*, *6*(1), 31–37. https://doi.org/https://doi.org/10.51544/mutiara%20pendidik.v6i1.1907

Pratiwi, S. W., Arjudin, Kurniati, N., & Sripatmi. (2021). Penerapan Konsep Persamaan Diferensial Biasa Pada Pemodelan Tali Penahan Jembatan Gantung. *GRIYA (Journal of Mathematics Education and Application)*, *1*, 559–569.

Rijoly, M. E., & Rumlawang, F. Y. (2020). Penyelesaian Numerik Persamaan Diferensial Orde Dua Dengan Metode Runge-Kutta Orde Empat Pada Rangkaian Listrik Seri LC. *TENSOR: Pure and Applied Mathematics Journal*, *1*(April), 1–7.

Rozikin, N., Sarjana, K., Arjudin, & Hikmah, N. (2021). Aplikasi Persamaan Diferensial Dalam Mengestimasi Jumlah Penduduk dengan Menggunakan Model Eksponensial dan Logistik. *GRIYA (Journal of Mathematics Education and Application)*, *1*, 11–18.

Sihombing, S. C., & Dahlia, A. (2018). Penyelesaian Persamaan Diferensial Linier Orde 1 dan 2 disertai Nilai Awal dengan Menggunakan Metode Runge Kutta Orde Lima Butcher dan Felhberg (RKF45). *Jurnal Matematika Integratif*, *14*(1), 51. https://doi.org/10.24198/jmi.v14.n1.15953.51-60