PROSIDING DISKUSI PANEL NASIONAL PENDIDIKAN MATEMATIKA

Original Research

Energi Ketetanggaan pada Graf Benteng

Rahma Naufal Zaky [1*)], Triyani[2], & Siti Rahmah Nurshiami[3]
[1,2,3,]Jurusan Matematika Universitas Jenderal Soedirman

INFO ARTICLES

Key Words:

Rook's Graph; Adjacency Matrix; Characteristic Equation; Adjacency Spectrum; Ajacency Energy

This article is licensed under a Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License.

***Abstract*:** *Adjacency energy is defined as the sum of the absolute values of all eigenvalues λ of the adjacency matrix of a graph. The adjacency matrix of a graph G with n vertices is an $n \times n$ matrix denoted by $A(G)$, where the entry a_{ij} is 1 if vertex v_i is connected to vertex v_j, and 0 otherwise. The objective of this research is to determine the general form of the adjacency energy of the rook's graph (B_{nn}) for $n \geq 2$. This is achieved by determining the characteristic equation of the adjacency matrix and the adjacency spectrum of the rook's graph (B_{nn}) for $n \geq 2$. The result of this research is the general form of the adjacency energy of the rook's graph (B_{nn}) for $n \geq 2$, which is given by $\mathcal{E}(B_{nn}) = 4n^2 - 8n + 4$.*

Abstrak: Energi ketetanggaan adalah jumlah nilai mutlak dari semua nilai eigen λ pada matriks ketetanggaan suatu graf. Matriks ketetanggaan dari graf G dengan n titik merupakan matriks berukuran $n \times n$ yang dinotasikan dengan $A(G)$, dimana entri a_{ij} bernilai 1 jika titik v_i terhubung dengan titik v_j dan bernilai 0 jika titik v_i tidak terhubung dengan titik v_j. Tujuan penelitian ini untuk menentukan bentuk umum energi ketetanggaan pada graf benteng (B_{nn}) dengan $n \geq 2$. Penentuan energi ketetanggaan pada penelitian ini dengan menentukan persamaan karakteristik matriks ketetanggaan dan spektrum ketetanggaan dari graf benteng (B_{nn}) dengan $n \geq 2$. Hasil dari penelitian ini diperoleh bentuk umum energi ketetanggaan dari graf benteng (B_{nn}) dengan $n \geq 2$ yaitu $\mathcal{E}(B_{nn}) = 4n^2 - 8n + 4$.

Correspondence Address: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jenderal Soedirman, Jln. Dr. Soeparno No.61, Karangwangkal, Kec. Purwokerto Utara, Kab. Banyumas, Jawa Tengah, Indonesia, 53122; e-mail: [1]rahma.zaky@mhs.unsoed.ac.id, [2]triyani@unsoed.ac.id, [3]siti.nurshiami@unsoed.ac.id

How to Cite: Zaky, R.N., Triyani, & Nurshiami, S.R. (2025). Energi Ketetanggaan pada Graf Benteng. *Prosiding Diskusi Panel Nasional Pendidikan Matematika*. 93-102.

Copyright: Rahma Naufal Zaky, Triyani, & Siti Rahmah Nurshiami. (2025)

PENDAHULUAN

Teori graf merupakan cabang dari matematika diskrit yang mempelajari struktur dan sifat-sifat graf. Graf dapat merepresentasikan objek-objek beserta hubungan antar objek, sehingga banyak diterapkan dalam berbagai bidang ilmu, seperti fisika, biologi, dan kimia. Sebagai contoh, molekul kimia dapat direpresentasikan dalam bentuk graf, dimana titik-titiknya merepresentasikan atom, sementara sisi yang menghubungkan titik-titik tersebut merepresentasikan ikatan antar atom (Slamin, 2019).

Menurut Gutman, dkk., (2012), teori *Hückel Molecular Orbital* (HMO) menjelaskan bahwa tingkat energi elektron dalam molekul hidrokarbon terkonjugasi dapat dikaitkan dengan nilai eigen matriks ketetanggaan graf. Matriks ketetanggaan graf merupakan matriks simetri yang elemen-elemen baris ke-*i* kolom ke-*j* nya bernilai satu jika titik *i* dan *j* bertetangga, serta bernilai nol jika titik *i* dan *j* tidak bertetangga. Teori HMO mendefinisikan total energi elektron sebagai penjumlahan energi setiap elektron. Pada molekul hidrokarbon terkonjugasi, total jumlah elektron berkaitan dengan banyaknya titik pada graf molekul, yaitu graf yang merepresentasikan molekul dalam kimia.

Berdasarkan teori HMO, studi tentang energi graf mulai diperkenalkan oleh Gutman pada tahun 1978. Menurut Gutman, dkk., (2012), energi graf didefinisikan sebagai jumlah nilai mutlak dari nilai eigen matriks ketetanggaan suatu graf. Energi graf yang diperoleh dari matriks ketetanggaan disebut energi ketetanggaan.

Beberapa penelitian mengenai energi graf telah dilakukan oleh Gutman, dkk., (2012) yang mengkaji energi graf berdasarkan matriks ketetanggaan pada *random bipartite graph*, *random graph*, *random multipartite graph*, dan beberapa graf khusus seperti graf lengkap, graf bintang, graf sikel, dan graf lintasan; selanjutnya Setyowidi dan Ratnasari (2012) mengkaji mengenai energi graf berdasarkan matriks derajat maksimal dari graf terhubung; serta Shulhany dan Agusutrisno (2019) mengkaji mengenai energi graf dengan menggunakan matriks jarak pada graf kipas. Penelitian yang telah dijabarkan sebelumnya mengkaji bentuk umum energi graf dari beberapa graf dengan menggunakan matriks yang berbeda. Pada penelitian selanjutnya, penulis tertarik untuk melanjutkan penelitian dari Gutman yaitu menentukan bentuk umum energi graf berdasarkan matriks ketetanggaan pada graf benteng (B_{nn}) sehingga dapat memperluas kajian pustaka mengenai energi graf karena hingga saat ini belum ada penelitian yang secara khusus membahas energi graf pada graf benteng (B_{nn}). Graf benteng (B_{nn}) terbentuk dari hasil perkalian kartesius dari dua graf lengkap (Karmilawati, 2020).

METODE

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi pustaka dengan cara mencari, mempelajari, dan mengumpulkan informasi dari berbagai pustaka seperti buku, jurnal, dan literatur yang berhubungan dengan materi untuk menentukan energi ketetanggaan. Penelitian dilakukan di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jenderal Soedirman pada bulan September 2024 hingga Juni 2025. Subjek utama dalam penelitian ini adalah graf benteng (B_{nn}) yang merupakan graf hasil perkalian kartesius dari dua graf lengkap (K_n).

Penelitian ini dilakukan dengan menggunakan bantuan *software* Maple 13 yang berperan penting dalam membantu proses perhitungan determinan, pembentukan polinomial karakteristik, dan penentuan nilai eigen dari matriks ketetanggaan. Untuk memastikan validitas dan reliabilitas hasil, digunakan pendekatan induksi matematika sebagai teknik pembuktian formal terhadap bentuk umum hasil yang ditemukan, sehingga temuan dapat diverifikasi secara logis dan matematis.

Penelitian ini mengkaji energi ketetanggaan pada graf benteng (B_{nn}) dengan $n \geq 2$ dimana untuk menentukan energi ketetanggaan harus diketahui terlebih dahulu matriks ketetanggaan, persamaan karakteristik matriks ketetanggaan, dan spektrum ketetanggaan graf benteng (B_{nn}) dengan

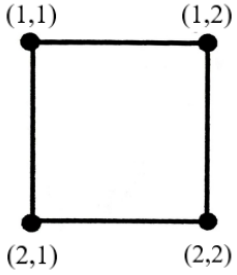
$n \geq 2$. Selanjutnya, perhitungan energi ketetanggaan diperoleh dari jumlah nilai mutlak dari seluruh nilai eigen.

HASIL

Bagian ini menjabarkan perhitungan energi ketetanggaan graf benteng (B_{nn}) dengan $n \geq 2$. Sebelum menentukan energi ketetanggaan, akan ditentukan terlebih dahulu persamaan karakteristik matriks ketetanggaan dan spektrum ketetanggaan dari graf benteng (B_{nn}) dengan $n \geq 2$.

1. Persamaan Karakteristik Matriks Ketetanggaan dan Spektrum Ketetanggaan pada Graf Benteng (B_{22})

Graf benteng (B_{22}) digambarkan sebagai berikut.



Gambar 1. Graf Benteng (B_{22})

Berdasarkan Gambar 1, matriks ketetanggaan dari graf benteng (B_{22}) sebagai berikut

$$A(B_{22}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya, dicari persamaan karakteristik matriks ketetanggaan dari graf benteng (B_{22}) yaitu sebagai berikut

$$det\big(\lambda I_4 - A(B_{22})\big) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

Persamaan 1 akan direduksi menjadi matriks segitiga atas menggunakan OBE dengan memperhatikan sifat-sifat determinan yang dijabarkan sebagai berikut

1. Menukarkan elemen-elemen baris R_1 dengan elemen-elemen baris R_2 $(R_1 \sim R_2)$

$$(-1)\begin{vmatrix} -1 & \lambda & 0 & -1 \\ \lambda & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

2. Menukarkan elemen-elemen baris R_2 dengan elemen-elemen baris R_4 $(R_2 \sim R_4)$

$$(-1)^2\begin{vmatrix} -1 & \lambda & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & \lambda \\ -1 & 0 & \lambda & -1 \\ \lambda & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Mengurangkan elemen-elemen baris R_3 dengan elemen-elemen baris R_1 $(R_3 - R_1)$ dan menambahkan elemen-elemen baris R_4 dengan hasil kali (λ) elemen-elemen baris R_1 $(R_4 + \lambda R_1)$

$$\begin{vmatrix} -1 & \lambda & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & \lambda \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^2 - 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

4. Mengurangkan elemen-elemen baris R_3 dengan hasil kali (λ) elemen-elemen baris R_2 $(R_3 - \lambda R_2)$ dan menambahkan elemen-elemen baris R_4 dengan hasil kali $(\lambda^2 - 1)$ elemen-elemen baris R_2 $(R_4 + (\lambda^2 - 1)R_2)$

$$\begin{vmatrix} -1 & \lambda & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & \lambda \\ 0 & 0 & 2\lambda & -\lambda^2 \\ 0 & 0 & -\lambda^2 & \lambda(\lambda^2 - 2) \end{vmatrix} = 0.$$

5. Menambahkan elemen-elemen baris R_4 dengan hasil kali $\left(\frac{\lambda}{2}\right)$ elemen-elemen baris R_3 $\left(R_4 + \left(\frac{\lambda}{2}\right) R_3\right)$

$$\begin{vmatrix} -1 & \lambda & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & \lambda \\ 0 & 0 & 2\lambda & -\lambda^2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\lambda^3 - 2\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Persamaan karakteristik yang diperoleh sesuai dengan perhitungan *software* Maple 13. Dengan mengalikan elemen-elemen diagonal utama matriks segitiga atas, didapatkan persamaan karakteristik sebagai berikut

$det(\lambda I_4 - A(B_{22})) = 0$

$\Leftrightarrow (-1)(-1)(2\lambda)\left(\frac{1}{2}\lambda^3 - 2\lambda\right) = 0$

$\Leftrightarrow 2(\lambda)\left(\frac{1}{2}\right)(\lambda^3 - 4\lambda) = 0$

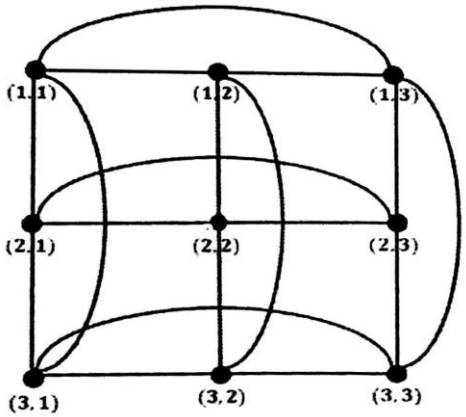
$\Leftrightarrow (\lambda)(\lambda)(\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0$

$\Leftrightarrow (\lambda + 2)(\lambda)^2(\lambda - 2) = 0.$ (2)

Berdasarkan persamaan 2, diperoleh akar-akar karakteristik yang merupakan nilai eigen matriks ketetanggaan dari graf benteng (B_{22}), yaitu $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 0$, dan $\lambda_3 = 2$, dengan multiplisitasnya $m(\lambda_1) = 1, m(\lambda_2) = 2$, dan $m(\lambda_3) = 1$.

2. Persamaan Karakteristik Matriks Ketetanggaan dan Spektrum Ketetanggaan pada Graf Benteng (B_{33})

Graf benteng (B_{33}) digambarkan sebagai berikut.



Gambar 2. Graf Benteng (B_{33})

Berdasarkan Gambar 2, matriks ketetanggaan dari graf benteng (B_{33}) sebagai berikut

$$A(B_{33}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya, dicari persamaan karakteristik matriks ketetanggaan dari graf benteng (B_{33}) yaitu sebagai berikut

$det(\lambda I_9 - A(B_{33})) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & \lambda & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \lambda & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & \lambda & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & \lambda & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \lambda & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

Persamaan 3 direduksi menjadi matriks segitiga atas. Persamaan karakteristik yang diperoleh sesuai dengan perhitungan *software* Maple 13. Dengan mengalikan elemen-elemen diagonal utama matriks segitiga atas, didapatkan persamaan karakteristik sebagai berikut

$det(\lambda I_9 - A(B_{33})) = 0$

$\Leftrightarrow (-1)(-1)(1)(1)(-\lambda^2 - 2\lambda)\left(\frac{(\lambda-1)(\lambda+2)}{\lambda}\right)(2\lambda - 2)(-\lambda^2 - \lambda + 2)\left(\frac{1}{2}\lambda^3 - \frac{3}{2}\lambda^2 - 3\lambda + 4\right) = 0$

$\Leftrightarrow (-1)(-1)(1)(1)(-1)(-1)(\lambda)(\lambda+2)\left(\frac{1}{\lambda}\right)(\lambda-1)(\lambda+2)(2)(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-2)\left(\frac{1}{2}\right)$
$(\lambda^3 - 3\lambda^2 - 6\lambda + 8) = 0$

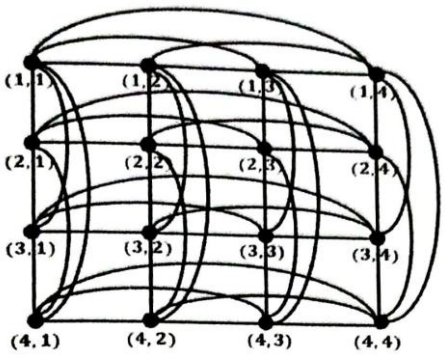
$\Leftrightarrow (-1)^4(\lambda)(\lambda+2)\left(\frac{1}{\lambda}\right)(\lambda-1)(\lambda+2)(2)(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda+2)\left(\frac{1}{2}\right)(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda+2) = 0$

$\Leftrightarrow (\lambda+2)^4(\lambda-1)^4(\lambda-4) = 0.$ (4)

Berdasarkan persamaan 4, diperoleh akar-akar karakteristik yang merupakan nilai eigen matriks ketetanggaan dari graf benteng (B_{33}), yaitu $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$, dan $\lambda_3 = 4$, dengan multiplisitasnya $m(\lambda_1) = 4$, $m(\lambda_2) = 4$, dan $m(\lambda_3) = 1$.

3. Persamaan Karakteristik Matriks Ketetanggaan dan Spektrum Ketetanggaan pada Graf Benteng (B_{44})

Graf benteng (B_{44}) digambarkan sebagai berikut.



Gambar 3. Graf Benteng (B_{44})

Berdasarkan Gambar 3, matriks ketetanggaan dari graf benteng (B_{44}) sebagai berikut

$$A(B_{44}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya, dicari persamaan karakteristik matriks ketetanggaan dari graf benteng (B_{44}) yaitu sebagai berikut

$det(\lambda I_{16} - A(B_{44})) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & \lambda & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \lambda & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & \lambda & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & \lambda & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & \lambda & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & \lambda & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & \lambda & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (5)$$

Persamaan 5 direduksi menjadi matriks segitiga atas. Persamaan karakteristik yang diperoleh sesuai dengan perhitungan *software* Maple 13. Dengan mengalikan elemen-elemen diagonal utama matriks segitiga atas, didapatkan persamaan karakteristik sebagai berikut

$det(\lambda I_{16} - A(B_{44})) = 0$

$$\Leftrightarrow (-1)(-1)(1)(1)(1)(\lambda+2)(-\lambda^2-\lambda+2)\left(\frac{-\lambda^2+4}{\lambda-1}\right)(1)(\lambda+2)(\lambda^3-3\lambda+2)\left(\frac{-\lambda^2+4}{\lambda-1}\right)$$
$$(-\lambda^2+6\lambda-8)(-\lambda^2+4)\left(\frac{-\lambda^2+4}{\lambda-1}\right)\left(\frac{\lambda^3-6\lambda^2-4\lambda+24}{\lambda-4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (-1)(-1)(1)(1)(1)(\lambda+2)(-1)(\lambda^2+\lambda-2)(-1)\left(\frac{\lambda^2-4}{\lambda-1}\right)(1)(\lambda+2)(\lambda^3-3\lambda+2)(-1)$$
$$\left(\frac{\lambda^2-4}{\lambda-1}\right)(-1)(\lambda^2-6\lambda+8)(-1)(\lambda^2-4)(-1)\left(\frac{\lambda^2-4}{\lambda-1}\right) \quad \left(\frac{\lambda^3-6\lambda^2-4\lambda+24}{\lambda-4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (-1)^8(\lambda+2)^2(\lambda^2+\lambda-2)\frac{(\lambda^2-4)^3}{(\lambda-1)^3}(\lambda^3-3\lambda+2)(\lambda^2-6\lambda+8)(\lambda^2-4)$$

$$\left(\frac{\lambda^3 - 6\lambda^2 - 4\lambda + 24}{\lambda - 4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (-1)^8(\lambda+2)^2(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-2)^3(\lambda+2)^3\frac{1}{(\lambda-1)^3}(\lambda+2)(\lambda-1)^2\,(\lambda+2)(\lambda-6)$$

$$(\lambda-2)(\lambda+2)\frac{1}{(\lambda-4)} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda+2)^9(\lambda-2)^6(\lambda-6) = 0. \quad (6)$$

Berdasarkan persamaan 6, diperoleh akar-akar karakteristik yang merupakan nilai eigen matriks ketetanggaan dari graf benteng (B_{44}), yaitu $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$, dan $\lambda_3 = 6$, dengan multiplisitasnya $m(\lambda_1) = 9$, $m(\lambda_2) = 6$, dan $m(\lambda_3) = 1$.

Berdasarkan hasil perhitungan yang telah dilakukan, diperoleh persamaan karakteristik matriks ketetanggaan dari graf benteng (B_{nn}) dengan $n \geq 2$ yang dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1. Persamaan Karakteristik Matriks Ketetanggaan Graf Benteng (B_{nn})

Graf Benteng	Persamaan Karakteristik Matriks Ketetanggaan	
B_{22}	$(\lambda+2)(\lambda)^2(\lambda-2)=0$	$(\lambda+2)^{(2-1)^2}(\lambda-2+2)^{2(2-1)}(\lambda-2(2)+2)=0$
B_{33}	$(\lambda+2)^4(\lambda-1)^4(\lambda-4)=0$	$(\lambda+2)^{(3-1)^2}(\lambda-3+2)^{2(3-1)}(\lambda-2(3)+2)=0$
B_{44}	$(\lambda+2)^9(\lambda-2)^6(\lambda-6)=0$	$(\lambda+2)^{(4-1)^2}(\lambda-4+2)^{2(4-1)}(\lambda-2(4)+2)=0$
B_{55}	$(\lambda+2)^{16}(\lambda-3)^8(\lambda-8)=0$	$(\lambda+2)^{(5-1)^2}(\lambda-5+2)^{2(5-1)}(\lambda-2(5)+2)=0$
B_{66}	$(\lambda+2)^{25}(\lambda-4)^{10}(\lambda-10)=0$	$(\lambda+2)^{(6-1)^2}(\lambda-6+2)^{2(6-1)}(\lambda-2(6)+2)=0$
B_{77}	$(\lambda+2)^{36}(\lambda-5)^{12}(\lambda-12)=0$	$(\lambda+2)^{(7-1)^2}(\lambda-7+2)^{2(7-1)}(\lambda-2(7)+2)=0$
⋮	⋮	⋮
B_{nn}	$(\lambda+2)^{(n-1)^2}(\lambda-n+2)^{2(n-1)}(\lambda-2n+2)=0$	

Sumber: Diolah dari Data Hasil Penelitian, 2025.

Dilihat dari Tabel 1, diperoleh bentuk umum persamaan karakteristik matriks ketetanggaan dari graf benteng (B_{nn}) dengan $n \geq 2$ sebagai berikut.

Teorema 1 Persamaan karakteristik matriks ketetanggaan dari graf benteng (B_{nn}) dengan $n \geq 2$ adalah

$$p_n(\lambda) = (\lambda+2)^{(n-1)^2}(\lambda-n+2)^{2(n-1)}(\lambda-2n+2) = 0.$$

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa $p_n(\lambda) = (\lambda+2)^{(n-1)^2}(\lambda-n+2)^{2(n-1)}(\lambda-2n+2) = 0$ untuk $n \geq 2$ menggunakan induksi matematika.

Langkah 1:

Membuktikan $p_n(\lambda)$ benar untuk $n = 2$, berlaku

$p_2(\lambda) = (\lambda+2)^{(2-1)^2}(\lambda-2+2)^{2(2-1)}(\lambda-2(2)+2) = 0$

$= (\lambda+2)(\lambda)^2(\lambda-2) = 0.$

(Benar)

Langkah 2:

Mengasumsikan $p_n(\lambda)$ benar untuk $n = k$, yaitu

$p_k(\lambda) = (\lambda+2)^{(k-1)^2}(\lambda-k+2)^{2(k-1)}(\lambda-2k+2) = 0.$

Langkah 3:

Membuktikan $p_n(\lambda)$ benar untuk $n = k+1$, yaitu

$p_{k+1}(\lambda) = (\lambda+2)^{((k+1)-1)^2}(\lambda-(k+1)+2)^{2((k+1)-1)}(\lambda-2(k+1)+2) = 0.$

Perhatikan bahwa

$$p_{k+1}(\lambda) = (\lambda+2)^{k^2}(\lambda-k-1+2)^{2k}(\lambda-2k-2+2)$$
$$= (\lambda+2)^{k^2-2k+2k+1-1}(\lambda-k+1)^{2k}\frac{(\lambda-k+2)^{2k-2}}{(\lambda-k+2)^{2k-2}}(\lambda-2k)\frac{(\lambda-2k+2)}{(\lambda-2k+2)}$$
$$= (\lambda+2)^{(k^2-2k+1)+(2k-1)}(\lambda-k+2)^{2k-2}\frac{(\lambda-k+1)^{2k}}{(\lambda-k+2)^{2k-2}}(\lambda-2k+2)\frac{(\lambda-2k)}{(\lambda-2k+2)}$$
$$= (\lambda+2)^{(k^2-2k+1)}(\lambda+2)^{(2k-1)}(\lambda-k+2)^{2k-2}\frac{(\lambda-k+1)^{2k}}{(\lambda-k+2)^{2k-2}}(\lambda-2k+2)$$
$$\frac{(\lambda-2k)}{(\lambda-2k+2)}$$
$$= \underbrace{(\lambda+2)^{(k-1)^2}(\lambda-k+2)^{2(k-1)}(\lambda-2k+2)}_{p_k(\lambda)}(\lambda+2)^{(2k-1)}\frac{(\lambda-k+1)^{2k}}{(\lambda-k+2)^{2k-2}}\frac{(\lambda-2k)}{(\lambda-2k+2)}$$
$$= (0)(\lambda+2)^{(2k-1)}\frac{(\lambda-k+1)^{2k}}{(\lambda-k+2)^{2k-2}}\frac{(\lambda-2k)}{(\lambda-2k+2)}$$
$$= 0.$$

(Terbukti)

Jadi, terbukti benar bahwa persamaan karakteristik matriks ketetanggaan dari graf benteng (B_{nn}) dengan $n \geq 2$ adalah

$$p_n(\lambda) = (\lambda+2)^{(n-1)^2}(\lambda-n+2)^{2(n-1)}(\lambda-2n+2) = 0.$$

Berdasarkan Teorema 1, bentuk umum persamaan karakteristik matriks ketetanggaan dari graf benteng (B_{nn}) dengan $n \geq 2$ telah diketahui, maka dapat diperoleh spektrum ketetanggaan graf benteng (B_{nn}) dengan $n \geq 2$.

Akibat 1 Spektrum ketetanggaan dari graf benteng (B_{nn}) dengan $n \geq 2$ adalah

$$spec(B_{nn}) = \begin{bmatrix} -2 & n-2 & 2(n-1) \\ (n-1)^2 & 2(n-1) & 1 \end{bmatrix}.$$

Bukti:

Berdasarkan Teorema 1, telah diketahui bentuk umum persamaan karakteristik matriks ketetanggaan dari graf benteng (B_{nn}) dengan $n \geq 2$ yaitu

$$p_n(\lambda) = (\lambda+2)^{(n-1)^2}(\lambda-n+2)^{2(n-1)}(\lambda-2n+2) = 0$$

yang dihasilkan dari persamaan karakteristik $det(\lambda I_{n^2} - A(B_{nn})) = 0$, maka diperoleh akar-akar karakteristik atau nilai eigennya $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = n-2$, dan $\lambda_3 = 2(n-1)$, dengan multiplisitasnya $m(\lambda_1) = (n-1)^2, m(\lambda_2) = 2(n-1)$, dan $m(\lambda_3) = 1$. Jadi, terbukti benar bahwa spektrum ketetanggaan dari graf benteng (B_{nn}) dengan $n \geq 2$ adalah

$$spec(B_{nn}) = \begin{bmatrix} -2 & n-2 & 2(n-1) \\ (n-1)^2 & 2(n-1) & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Bentuk Umum Energi Ketetanggaan pada Graf Benteng (B_{nn})

Energi ketetanggaan diperoleh dari jumlah nilai mutlak dari semua nilai eigen λ pada matriks ketetanggaan suatu graf. Energi ketetanggaan diperoleh dengan rumus sebagai berikut

$$\mathcal{E}(G) = \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|.$$

Setelah bentuk umum spektrum ketetanggaan dari graf benteng (B_{nn}) dengan $n \geq 2$ diketahui, maka dapat diperoleh energi ketetanggaan dari graf benteng (B_{nn}) dengan $n \geq 2$.

Akibat 2 Energi ketetanggaan dari graf benteng (B_{nn}) dengan $n \geq 2$ adalah

$$\mathcal{E}(B_{nn}) = 4n^2 - 8n + 4.$$

Bukti:
Berdasarkan Akibat 4.1, telah diketahui bentuk umum spektrum ketetanggaan dari graf benteng (B_{nn}) dengan $n \geq 2$ yaitu

$$spec(B_{nn}) = \begin{bmatrix} -2 & n-2 & 2(n-1) \\ (n-1)^2 & 2(n-1) & 1 \end{bmatrix}.$$

Oleh karena itu, energi ketetanggaan dari graf benteng (B_{nn}) dengan $n \geq 2$ yang didefinisikan sebagai jumlah nilai mutlak dari semua nilai eigen matriks ketetanggaan, dapat dihitung sebagai berikut

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(B_{nn}) &= (n-1)^2.|-2| + 2(n-1).|n-2| + 1.|2(n-1)| \\ &= (n-1)^2.2 + 2(n-1).(n-2) + 1.2(n-1) \\ &= (n^2-2n+1).2 + (2n-2).(n-2) + (2n-2) \\ &= (2n^2-4n+2) + (2n^2-6n+4) + (2n-2) \\ &= 4n^2-8n+4. \end{aligned}$$

Jadi, terbukti benar bahwa energi ketetanggaan graf benteng (B_{nn}) dengan $n \geq 2$ adalah

$$\mathcal{E}(B_{nn}) = 4n^2 - 8n + 4.$$

PEMBAHASAN

Penelitian ini berhasil merumuskan bentuk umum energi ketetanggaan dari graf benteng (B_{nn}) dengan $n \geq 2$. Berdasarkan pendekatan aljabar linear dan pembuktian melalui induksi matematika, diperoleh bahwa spektrum ketetanggaan graf benteng terdiri dari tiga nilai eigen yaitu $-2, n-2$, dan $2(n-1)$ serta masing-masing multiplisitasnya yaitu $(n-1)^2, 2(n-1)$ dan 1. Sehingga diperoleh bentuk umum energi ketetanggaan graf benteng (B_{nn}) dengan $n \geq 2$ yaitu $4n^2 - 8n + 4$.

Temuan ini memperluas hasil kajian sebelumnya yang dilakukan oleh Gutman, dkk., (2012), khususnya dalam konteks energi graf berdasarkan matriks ketetanggaan. Dalam hal ini, graf benteng menawarkan struktur yang khas sebagai hasil dari operasi kartesius dua graf lengkap, sehingga menghasilkan pola spektrum yang teratur dan dapat dirumuskan secara eksplisit.

Kontribusi utama dari penelitian ini terletak pada formulasi bentuk umum energi ketetanggaan graf benteng secara simbolik dan validasi formal melalui induksi matematika. Hal ini menunjukkan bahwa struktur simetris dari graf benteng mempermudah prediksi nilai spektrumnya, sekaligus membuka peluang untuk diterapkannya pendekatan serupa pada graf hasil operasi lainnya.

Keterbatasan dalam penelitian ini adalah fokus yang hanya diberikan pada energi ketetanggaan dan belum mencakup jenis matriks lain seperti *laplacian* atau *signless laplacian*. Oleh karena itu, studi lanjutan direkomendasikan untuk memperluas penelitian ini pada jenis graf dan matriks representasi lainnya, serta menerapkan verifikasi numerik menggunakan perangkat lunak alternatif seperti MATLAB atau Python.

SIMPULAN

Bentuk umum persamaan karakteristik matriks ketetanggaan dari graf benteng (B_{nn}) dengan $n \geq 2$ adalah

$$p_n(\lambda) = (\lambda+2)^{(n-1)^2}(\lambda-n+2)^{2(n-1)}(\lambda-2n+2) = 0.$$

Selanjutnya, dari persamaan karakteristik tersebut diperoleh bentuk umum spektrum ketetanggaan dari graf benteng (B_{nn}) dengan $n \geq 2$ yaitu sebagai berikut

$$spec(B_{nn}) = \begin{bmatrix} -2 & n-2 & 2(n-1) \\ (n-1)^2 & 2(n-1) & 1 \end{bmatrix}.$$

Kemudian, dari spektrum ketetanggaan tersebut diperoleh bentuk umum energi ketetanggaan dari graf benteng (B_{nn}) dengan $n \geq 2$ yaitu sebagai berikut

$$\mathcal{E}(B_{nn}) = 4n^2 - 8n + 4.$$

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jenderal Soedirman yang telah memberikan fasilitas dan lingkungan akademik yang mendukung selama proses penelitian ini berlangsung. Ucapan terima kasih juga disampaikan kepada dosen pembimbing yang telah membimbing dan memberikan masukan konstruktif dalam menyusun dan menyempurnakan isi artikel ini. Akhir kata, penulis juga berterima kasih kepada semua pihak yang telah memberikan dorongan moral dan intelektual selama penyusunan artikel ini.

DAFTAR RUJUKAN

Aldous. J. M., dan Wilson, R. J. (2004). *Graph and Applications An Introductory Approach.* Great Britian: Springer.

Alsbaldo, Y., dan Subhan, M. (2021). Sifat-Sifat Matriks Ketetanggaan pada Graf Petersen. *Journal of Mathematics UNP*, 6(3), 73-78.

Anton, H., dan Rorres, C. (2013). *Elementary Linear Algebra: Application Version.* United States of America: John Willey & Sons, Inc.

Aryani, F., dan Maisyitah, R. A. D. (2015). Nilai Eigen dan Vektor Eigen dari Matriks Kompleks Bujursangkar Ajaib. *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, 1(2), 10-16.

Biggs, N. (1993). *Algebraic Graph Theory.* Australia: Cambridge University Press.

Diestel, R. (2005). *Graph Theory.* New York: Springer-Verlag Heidelberg.

Gutman, I., Li, X., dan Shi, Y. (2012). *Graph Energy*. Springer New York: Springer Science + Business Media, LLC.

Imrona, M. (2013). *Aljabar Linear Dasar.* Jakarta: Erlangga.

Indriati, K. (2019). *Matriks, Vektor, dan Program Linier.* Jakarta: Universitas Katolik Indonesia Atma Jaya.

Karmilawati. (2020). *Jenis-Jenis Graf.* Jakarta: Erlangga.

Larson, R. dan Falvo, D. C. (2009). *Elementary Linear Algebra.* New York: Houghton Mifflin Harcourt Publishing Company.

Munir, R. (2010). *Matematika Diskrit.* Bandung: Infomatika Bandung.

Selvia, S. M., Narwen, dan Zulakmal. (2019). Spektrum Graf Bintang S_n dan Graf Lengkap K_n untuk $n \geq 2$. *Jurnal Matematika UNAND*, 4(4), 129-136.

Sembiring, P. (2003). *Teori dan Aplikasi Matriks.* Medan: USU Press.

Setyowidi, D. D. dan Ratnasari, L. (2012). Energi Derajat Maksimal pada Graf Terhubung. *Jurnal Matematika*, 1(1), 46-55.

Shulhany, M. A. dan Agusutrisno, A. (2019). Energi Jarak dari Graf Kipas. *Jurnal Teknika,* 15(1), 23-28.

Slamin. (2019). *Teori Graf dan Aplikasinya*. Malang: Dream Litera Buana.

Utomo, D. P. dan Huda, M. (2020). *Pemahaman Relasional Analisis Proses Pembuktian Menggunakan Induksi Matematika.* Yogyakarta: CV Bildung Nusantara.

Wilson, R. J. (1998). *Introduction to Graph Theory.* Malaysia: Longman.

Wilson, R. J., dan Watkins, J. J. (1990). *Graph Theory.* Toronto: John Willey & Sons, Inc.