

Analisis Teknik Integral Substitusi, Fraksi Parsial, dan Fungsi Irasional Melalui Kajian Pustaka

Muharram Rabbanii Iskandar¹, Anjelina Rosita Nasing², Natasya Afrilia³, Audi Fadilah⁴,
Azahra Nur Latifah⁵, & Ul'fah Harnaeny⁶
^{1,2,3,4,5,6}Universitas Indraprasta PGRI

INFO ARTICLES

Key Words:

Teknik Pengintegralan Lanjutan;
Substitusi; Fraksi Parsial; Kajian
Pustaka.



This article is licensed
under a Creative Commons Attribution-
ShareAlike 4.0 International License.

Abstract: This study aims to describe and analyze integration techniques involving substitution, partial fractions, and irrational functions through a literature review approach. Data were collected from journals, books, articles, and online sources related to calculus and integration methods. The review shows that these techniques are essential for solving integrals that cannot be handled directly, especially those involving composite functions, rational expressions, and irrational forms. Substitution simplifies complex integrands, partial fractions are effective for rational functions with factorable denominators, and irrational integrals are often solved using algebraic manipulation or trigonometric substitution. The findings indicate that these techniques help students understand integration concepts more clearly and improve their problem-solving skills in calculus.

Abstrak: Penelitian ini bertujuan untuk mendeskripsikan dan menganalisis teknik integral yang meliputi substitusi, fraksi parsial, dan fungsi irasional melalui pendekatan kajian pustaka. Data dikumpulkan dari jurnal, buku, artikel, dan sumber daring yang berkaitan dengan kalkulus dan metode integral. Hasil kajian menunjukkan bahwa teknik-teknik tersebut penting dalam menyelesaikan integral yang tidak dapat ditangani secara langsung, terutama yang melibatkan fungsi majemuk, bentuk rasional, dan bentuk irasional. Substitusi digunakan untuk menyederhanakan integrand yang kompleks, fraksi parsial efektif diterapkan pada fungsi rasional dengan penyebut yang dapat difaktorkan, sedangkan integral fungsi irasional umumnya diselesaikan melalui manipulasi aljabar atau substitusi trigonometri. Temuan ini menunjukkan bahwa teknik-teknik tersebut membantu mahasiswa memahami konsep integral dengan lebih jelas dan meningkatkan kemampuan pemecahan masalah dalam kalkulus.

Correspondence Address: Jl. Raya Tengah No.80, RT.6/RW.1, Gedong, Kecamatan Pasar Rebo, Kota Jakarta Timur, Daerah Khusus Ibukota Jakarta, Indonesia; e-mail: muharramiskandar06@gmail.com.

How to Cite: Iskandar, M.R., Nasing, A. R., Afrilia, N., Fadilah, A., Latifah, A.N., & Harnaeny, U. (2026). Analisis Teknik Integral Substitusi, Fraksi Parsial, dan Fungsi Irasional Melalui Kajian Pustaka. *Prosiding Diskusi Panel Pendidikan Matematika*, 581-588.

Copyright: Muharram Rabbanii Iskandar, Anjelina Rosita Nasing, Natasya Afrilia, Audi Fadilah, Azahra Nur Latifah, & Ul'fah Harnaeny, (2026).

PENDAHULUAN

Kalkulus integral merupakan salah satu mata kuliah yang penting dalam program studi pendidikan matematika yang mempelajari konsep limit, turunan, dan integral (Septiani, 2025). Integral sebagai pembahasan utama digunakan untuk menyelesaikan berbagai permasalahan matematis (Monariska, 2019), maka penguasaan teknik pengintegralan menjadi kemampuan yang harus dimiliki mahasiswa pendidikan matematika untuk menyelesaikan persoalan tersebut secara sistematis, karena tidak semua fungsi dapat diintegrasikan hanya dengan teknik dasar pengintegralan. Terdapat berbagai fungsi yang memiliki bentuk kompleks yang membuat teknik pengintegralan dasar tidak bisa langsung dilakukan untuk menyelesaikannya. Beberapa teknik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan soal integral lanjut, yaitu teknik integral substitusi trigonometri dan aljabar, teknik fraksi parsial untuk mengintegrasikan fungsi rasional, serta teknik khusus untuk mengintegrasikan fungsi irasional. Ketiga teknik tersebut memiliki cara pengerjaan yang berbeda-beda sehingga mahasiswa perlu benar-benar paham untuk menerapkan teknik pengintegralan lanjutan tersebut dengan tepat sesuai bentuk fungsi yang akan diintegrasikan (Anggoro, 2023).

Teknik pengintegralan lanjut sangat penting untuk menyelesaikan berbagai jenis soal integral, namun mahasiswa masih mengalami kesulitan dalam aspek pemahaman serta penerapan konsepnya secara tepat (Nurrasa, 2024). Hal ini membuktikan perlunya analisis secara mendalam pada teknik pengintegralan lanjut baik dari segi pemahaman maupun penerapannya (Garak, S. S. (2023). Kesulitan yang ditemui tidak jauh dari identifikasi teknik yang sesuai pada bentuk fungsi tertentu hingga cara pengerjaan masing-masing teknik beserta aturan-aturannya. Salah satu teknik pengintegralan yang penting adalah substitusi, metode ini menyederhanakan integral fungsi yang berupa hasil dari turunan aturan rantai. Substitusi ini mengubah variabel menjadi u dan du untuk bentuk yang sesuai dalam integral (Strang dan Herman, 2016). Namun dalam teknik pengintegralan lanjutan, khususnya substitusi trigonometri ini digunakan untuk menyederhanakan bentuk integral tertentu. Lingaraju (2025) menjelaskan bahwa metode substitusi dalam integral tidak hanya terbatas pada pergantian variabel saja, tapi mencakup substitusi trigonometri dan transformasi lanjutan yang digunakan untuk menyelesaikan integral berbentuk lebih kompleks.

Setelah substitusi lanjutan, terdapat teknik fraksi parsial yang digunakan dalam penyelesaian integral fungsi rasional. Fungsi rasional yang berbentuk pecahan dua polinom akan sulit untuk diintegrasikan secara langsung, maka perlu diuraikan menjadi beberapa pecahan yang lebih sederhana. Luo (2024) menjelaskan bahwa dekomposisi fraksi parsial memungkinkan suatu fungsi rasional dipecah hingga menjadi komponen yang lebih sederhana sehingga proses pengintegralan dapat dilakukan secara sistematis. Maka hal ini membuat metode fraksi parsial menjadi salah satu teknik yang sangat penting dalam kajian pengintegralan lanjutan, khususnya pada fungsi rasional. Teknik pengintegralan lanjutan selanjutnya adalah integral fungsi irasional, yaitu integral dengan bentuk akar dari suatu fungsi aljabar. Bentuk akar seperti ini cenderung membuat integral tidak bisa diselesaikan secara langsung menggunakan aturan dasar sehingga diperlukan transformasi tertentu untuk memanipulasi bentuk akar agar menjadi lebih sederhana. Cieřliński (2023) menjelaskan bahwa berbagai bentuk integral irasional dapat diubah menjadi bentuk yang lebih sederhana dengan substitusi yang tepat seperti substitusi Euler untuk bentuk integral yang berkaitan dengan akar kuadrat dari polinom kuadrat.

Berdasarkan hal tersebut, penguasaan teknik pengintegralan lanjutan yang mencakup substitusi lanjutan, fraksi parsial, dan penanganan fungsi irasional merupakan kompetensi yang sangat diperlukan oleh mahasiswa dan praktisi matematika. Berbagai penelitian menunjukkan bahwa kesulitan utama yang dihadapi mahasiswa dalam mempelajari kalkulus integral sering kali berpusat pada ketidakmampuan dalam memilih dan mengaplikasikan teknik yang tepat sesuai dengan karakteristik integran yang dihadapi (Utari, R. S. 2019). Oleh sebab itu, artikel ilmiah ini disusun dengan tujuan untuk memberikan penjelasan yang sistematis mengenai integral substitusi lanjutan, langkah-langkah penyelesaian integral fungsi rasional menggunakan metode fraksi parsial, serta prosedur pengintegralan fungsi irasional melalui teknik substitusi yang sesuai. Dengan demikian,

diharapkan artikel ini dapat menjadi referensi akademis yang bermanfaat bagi pembaca dalam memahami dan mengaplikasikan teknik-teknik tersebut secara tepat dan efisien.

Rumusan Masalah:

1. Bagaimana cara menyelesaikan soal integral dengan teknik integral substitusi lanjutan?
2. Bagaimana cara menyelesaikan integral fungsi rasional dengan metode fraksi parsial?
3. Bagaimana cara menyelesaikan integral fungsi irasional dengan teknik substitusi yang sesuai?

Tujuan Penelitian:

1. Mendeskripsikan langkah penyelesaian integral dengan teknik substitusi lanjutan
2. Mendeskripsikan langkah penyelesaian integral fungsi rasional menggunakan fraksi parsial.
3. Mendeskripsikan langkah penyelesaian integral fungsi irasional melalui substitusi.

METODE

Penelitian ini menggunakan metode kajian pustaka sebagai pendekatan utamanya untuk mengumpulkan, menelaah, dan menganalisis sumber atau referensi ilmiah yang relevan dengan topik pembahasan. Metode ini dipilih karena dapat memberikan fondasi teori yang kuat, memperluas perspektif analisis, dan membantu peneliti untuk memahami kajian materi secara sistematis (Snyder, 2019). Melalui pendekatan ini, peneliti diharapkan tidak hanya mengumpulkan informasi dari berbagai referensi, namun melakukan analisis terhadap hasil penelitian sebelumnya agar mendapatkan pemahaman yang lebih mendalam terkait topik yang dikaji (Barry, E. S. 2022).

Berbagai sumber yang digunakan dalam penelitian ini meliputi buku akademik, artikel jurnal ilmiah, laporan penelitian, serta sumber-sumber dengan kredibilitas lainnya yang memiliki keterkaitan dengan topik penelitian. Pemilihan sumber dilakukan secara selektif dengan mempertimbangkan keterkaitan, kualitas isi, kejelasan metodologi, serta kebaruan informasi (Kraus et al. 2022). Sumber yang sifatnya umum digunakan sebagai pengantar konsep, sedangkan sumber yang lebih spesifik digunakan untuk mendukung argumen utama dalam pembahasan.

Proses kajian pustaka dilakukan melalui beberapa tahapan. Tahap pertama adalah mengidentifikasi tema dan merumuskan kata kunci yang sesuai dengan pembahasan penelitian (van wee et al 2024). Tahap ini dilakukan agar pencarian referensi menjadi lebih terarah dan tidak menyimpang terlalu jauh dari topik pembahasan. Tahap berikutnya adalah pencarian literatur melalui berbagai sumber data dan sumber akademik yang mempunyai kredibilitas. Setelah referensi terkumpul, selanjutnya dilakukan analisis untuk menilai isi, konteks, dan kegunaan masing-masing sumber terhadap pembahasan penelitian. Pada tahap ini, peneliti memperhatikan dengan seksama kesesuaian antara teori, temuan empiris, dan argumentasi yang terdapat dalam literatur.

Selanjutnya data literatur dianalisis menggunakan teknik deskriptif analitis. Teknik ini dilakukan dengan cara memaparkan isi dari setiap sumber, membandingkan pandangan berbagai penulis, serta mengaitkan temuan-temuan yang relevan untuk membentuk kerangka pemikiran yang menyeluruh. Analisis kemudian ditekankan pada proses interpretasi dan sintesis agar diperoleh kesimpulan yang mendalam. Dengan demikian, kajian pustaka dalam penelitian ini berfungsi sebagai fondasi utama dalam membangun argumentasi ilmiah.

Melalui kajian pustaka, penelitian ini diharapkan dapat menyampaikan pembahasan yang berbasis penelitian ilmiah, terstruktur, dan dapat dipertanggungjawabkan secara akademik. Selain itu, metode ini juga membantu mengidentifikasi celah penelitian, sehingga hasil kajian dapat memberikan kontribusi untuk pengembangan ilmu pengetahuan.

HASIL

Berdasarkan metode kajian pustaka, dapat ditemukan bahwa penyelesaian untuk pembahasan ini dapat dirumuskan ke dalam tiga bentuk utama, yaitu integral substitusi lanjutan, integral fungsi rasional yang diselesaikan dengan fraksi parsial, dan integral fungsi irasional yang diselesaikan dengan substitusi yang sesuai.

Integral Substitusi Lanjutan 2

Menurut Gilbert Strang (2016), solusi yang dapat digunakan dalam penyatuan kombinasi perkalian dari $\sin x$ dan $\cos x$ berpangkat dengan cara penulisan ulang bentuk integral menjadi bentuk $\int \sin^j x \cos x \, dx$ atau $\int \cos^j x \sin x \, dx$. Setelah menulis ulang bentuknya, kita dapat menggunakan substitusi u . Contohnya:

Hitunglah $\int \cos^3 x \sin x \, dx$

Jawab: gunakan substitusi u , maka $u = \cos x$ dan $du = -\sin x \, dx$

Sehingga $\int \cos^3 x \sin x \, dx = -\int u^3 du = -\frac{1}{4}u^4 + C = -\frac{1}{4}\cos^4 x + C$.

Jika keduanya memiliki pangkat seperti bentuk $\int \cos^j x \sin^k x \, dx$ dimana k adalah bilangan ganjil, maka solusinya adalah menggunakan identitas $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Contohnya:

Hitunglah $\int \cos^2 x \sin^3 x \, dx$

Jawab: $\int \cos^2 x \sin^3 x \, dx = \int \cos^2 x (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx$ kemudian gunakan substitusi u

$u = \cos x$ dan $du = -\sin x \, dx$. Maka $\int \cos^2 x \sin^3 x \, dx = \int -u^2(1 - u^2) du = \int (u^4 - u^2) du = \frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C$.

Jika keduanya memiliki pangkat genap, maka dapat menggunakan rumus kesamaan sudut paruh:

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$, dan $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$.

Untuk integral yang memiliki bentuk $\sin(ax)$ atau $\cos(bx)$ dapat menggunakan rumus:

$$\sin(ax) \sin(bx) = \frac{1}{2}\cos((a-b)x) - \frac{1}{2}\cos((a+b)x)$$

$$\sin(ax) \cos(bx) = \frac{1}{2}\sin((a-b)x) + \frac{1}{2}\sin((a+b)x)$$

$$\cos(ax) \cos(bx) = \frac{1}{2}\cos((a-b)x) + \frac{1}{2}\cos((a+b)x)$$

Untuk integral perkalian $\tan x$ dan $\sec x$ berpangkat mempunyai cara yang sama dengan integral perkalian $\sin x$ dan $\cos x$ berpangkat, namun jika pangkat k bilangan ganjil maka dapat menggunakan identitas $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$.

Integral Substitusi Lanjutan 3

Menurut Gilbert Strang (2016), substitusi trigonometri adalah teknik yang sangat berguna untuk menyelesaikan soal dengan bentuk integral akar. Teknik ini menggunakan substitusi untuk menulis ulang integral bentuk tersebut menjadi bentuk integral trigonometri. Berikut beberapa bentuk dan cara pengerjaannya.

Bentuk $\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$ dapat diselesaikan dengan substitusi $x = a \sin \theta$ dengan $dx = a \cos \theta \, d\theta$. Contohnya $\int \sqrt{9 - x^2} \, dx = \int \sqrt{9 - (3\sin \theta)^2} 3\cos \theta \, d\theta$

$$= \int 9 \cos^2 \theta \, d\theta = \int 9 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\theta) \right) d\theta = \frac{9}{2}\theta + \frac{9}{4}\sin(2\theta) + C = \frac{9}{2}\theta + \frac{9}{4}(2 \sin \theta \cos \theta) + C$$

$$= \frac{9}{2} \sin^{-1} \left(\frac{x}{3} \right) + \frac{9}{2} \times \frac{x}{3} \times \frac{\sqrt{9-x^2}}{3} + C = \frac{9}{2} \sin^{-1} \left(\frac{x}{3} \right) + \frac{x\sqrt{9-x^2}}{2} + C.$$

Bentuk $\int \sqrt{a^2 + x^2} \, dx$ dapat diselesaikan dengan substitusi $x = a \tan \theta$ dan $dx = a \sec^2 \theta \, d\theta$ dengan $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Contohnya $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\sec^2 \theta}{\sec \theta} d\theta = \int \sec \theta \, d\theta = \ln|\sec \theta + \tan \theta| + C = \ln|\sqrt{1+x^2} + x| + C$.

Bentuk $\int \sqrt{x^2 - a^2} \, dx$ dapat diselesaikan dengan substitusi $x = a \sec \theta$ dan $dx = a \sec \theta \tan \theta \, d\theta$ dengan $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ atau $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$. Contohnya $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}} = \int \frac{2\sec \theta \tan \theta \, d\theta}{2\tan \theta} = \int \sec \theta \, d\theta = \ln|\sec \theta + \tan \theta| + C$.

Integral Fungsi Rasional dengan Fraksi Parsial

Pada integral fungsi rasional ini, metode dekomposisi pecahan parsial membuat fungsi rasional yang rumit menjadi lebih sederhana dan dapat diintegrasikan dengan mudah. Fungsi rasional mempunyai bentuk umum $\frac{P(x)}{Q(x)}$ dan jika pangkat $P(x)$ lebih besar dari pangkat $Q(x)$ maka dapat dilakukan pembagian terlebih dahulu, contohnya seperti $\frac{x^2+3x+5}{x+1}$ yang dapat diubah menjadi $x + 2 + \frac{3}{x+1}$ dengan rumus $R(x) + \frac{K(x)}{l(x)}$ dimana $R(x)$ adalah hasil pembagian dan $\frac{K(x)}{l(x)}$ adalah sisa pembagian. Namun jika pangkat $P(x)$ lebih kecil dari $Q(x)$ dapat dilakukan pemisahan seperti contoh berikut, $\frac{3x}{x^2-x-2}$ dapat diubah bentuknya menjadi $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-2}$ agar lebih sederhana. Untuk mengintegrasikan pecahan rasional yang pangkat penyebutnya lebih besar dari pembilang terdapat 3 kemungkinan, yaitu:

1. Faktor linear tidak berulang

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \dots + \frac{A_n}{a_nx + b_n}$$

Contoh: $\int \frac{3x+2}{x^3-x^2-2x} dx$

$$\frac{3x+2}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}$$

$$\begin{aligned} \frac{3x+2}{x(x-2)(x+1)} &= \frac{A(x-2)(x+1) + B(x+1)x + C(x-2)x}{x(x-2)(x+1)} \\ 3x+2 &= A(x-2)(x+1) + B(x+1)x + C(x-2)x \\ 3x+2 &= (A+B+C)x^2 + (-A+B-2C)x + (-2A) \end{aligned}$$

Maka persamaannya:

$$\begin{aligned} A+B+C &= 0 \\ -A+B-2C &= 3 \\ -2A &= 2 \end{aligned}$$

Maka dapat diketahui masing masing konstanta $A = -1$, $B = \frac{4}{3}$, $C = -\frac{1}{3}$. Sehingga

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+2}{x^3-x^2-2x} dx &= \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{4}{3} \times \frac{1}{(x-2)} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{(x+1)} \right) dx \\ &= -\ln|x| + \frac{4}{3}\ln|x-2| - \frac{1}{3}\ln|x+1| + C \end{aligned}$$

2. Faktor linear berulang

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \dots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

Contoh: $\int \frac{x-2}{(2x-1)^2(x-1)} dx$

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{(2x-1)^2(x-1)} &= \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{(2x-1)^2} + \frac{C}{x-1} \\ x-2 &= A(2x-1)(x-1) + B(x-1) + C(2x-1)^2 \\ x-2 &= (2A+4C)x^2 + (-3A+B-4C)x + (A-B+C) \end{aligned}$$

Maka persamaannya

$$\begin{aligned} 2A+4C &= 0 \\ -3A+B-4C &= 1 \\ A-B+C &= -2 \end{aligned}$$

Maka diketahui masing-masing konstanta $A = 2$, $B = 3$, $C = -1$. Sehingga

$$\begin{aligned} \int \frac{x-2}{(2x-1)^2(x-1)} dx &= \int \left(\frac{2}{2x-1} + \frac{3}{(2x-1)^2} - \frac{1}{x-1} \right) dx \\ &= \ln|2x-1| - \frac{3}{2(2x-1)} - \ln|x-1| + C \end{aligned}$$

3. Faktor kuadratistik

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1x + B_1}{(ax^2 + bx + c)^2} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_nx + B_n}{(ax^2 + bx + c)^2}$$

Contoh: $\int \frac{2x-3}{x^3+x} dx$

$$\frac{2x-3}{x(x^2+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x}$$

$$2x-3 = (Ax+B)x + C(x^2+1)$$

Maka diketahui $A = 3$, $B = 2$, $C = -3$. Sehingga

$$\int \frac{2x-3}{x^3+x} dx = \int \left(\frac{3x+2}{x^2+1} - \frac{3}{x} \right) dx = \frac{3}{2} \ln|x^2+1| + 2 \tan^{-1} x - 3 \ln|x| + C$$

Integral Fungsi Irasional

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt{x}} dx$$

Untuk integral bentuk irasional tersebut, pertama kita dapat mencari KPK dari akar pangkat tersebut, yaitu 3 dan 2. KPKnya adalah 6, maka dibuat substitusi $x = u^6$, $dx = 6u^5 du$. Sehingga

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt{x}} dx &= \int \frac{\sqrt[3]{u^6}}{1+\sqrt{u^6}} 6u^5 du = 6 \int \frac{u^7}{1+u^3} du = u^6 - 2u^3 - 3 + 2 \ln|1+u^3| + C \\ &= x - 2\sqrt{x} + 2 \ln|1+\sqrt{x}| + C \end{aligned}$$

PEMBAHASAN

Berdasarkan hasil penelitian tersebut, teknik pengintegralan lanjutan dapat dikelompokkan menjadi 3 bentuk berbeda, yaitu integral substitusi lanjutan, integral fungsi rasional dengan fraksi parsial, dan integral fungsi irasional dengan substitusi yang sesuai. Temuan ini berfokus pada pemilihan metode yang tepat untuk setiap bentuk integral, karena metode penyelesaian setiap bentuk tidak dapat disamakan dengan yang lainnya. Maka dalam hal ini, teknik pengintegralan dengan aturan dasar tidak dapat digunakan untuk menyelesaikan bentuk integral yang bentuknya kompleks dan khusus.

Pada integral substitusi lanjutan, langkah utama dalam menyelesaikannya adalah dengan membuat ulang atau memanipulasi bentuk awal integral sesuai dengan ketentuan substitusi yang sudah dikemukakan, yaitu sinus dan cosinus atau secan dan tangen. Setelah diidentifikasi bentuk trigonometri yang sesuai, perhatikan masing-masing pangkat dari trigonometri tersebut ganjil atau genap. Maka setelahnya dapat dilakukan metode substitusi u dan du berdasarkan trigonometri tersebut.

Selanjutnya pada integral fungsi rasional dengan metode fraksi parsial, metode ini digunakan dalam fungsi polinom bentuk pecahan yang berfokus pada pangkat pembilang dan penyebut. Jika pangkat pembilang lebih tinggi dari penyebut, maka pembagian secara langsung dapat dilakukan untuk mendapatkan hasil pembagiannya serta sisa pembagiannya sebagai hasil. Namun jika ternyata pangkat penyebut lebih tinggi dari pembilang, terdapat 3 kemungkinan cara yang dapat dilakukan, yaitu faktor linear tidak berulang, faktor linear berulang, serta faktor kuadratistik. Hasilnya menunjukkan bahwa ketiga cara khusus tersebut dapat menyelesaikan soal dengan 3 bentuk pecahan kompleks yang berbeda hingga menjadi bentuk yang mudah untuk diintegrasikan.

Pada fungsi irasional, akar pada bentuk fungsi aljabar menjadi tantangan dalam penyelesaiannya. Maka dengan substitusi khusus yang digunakan untuk mengubah bentuk irasional tersebut menjadi lebih sederhana dengan menentukan KPK dari pangkat akar yang ada, kemudian melakukan substitusi agar semua bentuk akarnya sama.

Secara keseluruhan, ketiga teknik pengintegralan lanjutan ini memiliki cara pengerjaan yang berbeda-beda. Menyebabkan peserta didik dapat mengalami kesulitan dalam prosesnya yang berbeda-beda juga, namun seluruh teknik ini memiliki tujuan yang sama untuk menyederhanakan setiap bentuk kompleks yang muncul. Peserta didik perlu memiliki kemampuan untuk mengenali bentuk integral, mengenali polanya, lalu memilih teknik yang tepat untuk setiap bentuknya yang unik.

SIMPULAN

Kesimpulannya ketiga teknik pengintegralan lanjutan memiliki keterkaitan yang mendalam serta saling melengkapi dalam menyelesaikan berbagai bentuk integral yang tidak dapat diselesaikan dengan teknik pengintegralan dasar. Pada integral substitusi lanjut, perlu mengenal sifat ganjil dan genap dari pangkat trigonometri yang muncul hingga kemudian melakukan substitusi u dengan bentuk trigonometri tersebut. Pada fraksi parsial, kemampuan dalam membedakan bentuk pecahan diperlukan untuk menyelesaikan ketiga bentuk tersebut, yaitu faktor linear tidak berulang, faktor linear berulang, dan faktor kuadratik yang menjadi penentu untuk memperoleh nilai konstanta. Hingga akhirnya pada integral fungsi irasional, Penentuan akar pangkat serta KPK diperlukan untuk menyederhanakan bentuk yang kompleks menjadi sederhana.

Hasil temuan ini menekankan bahwa kesulitan yang dialami bukan hanya terdapat pada ketidaktahuan terhadap rumus, namun pada kurangnya kemampuan mengidentifikasi setiap bentuk dan pola khusus yang diperlukan untuk menyelesaikan setiap soal integral dengan bentuk yang berbeda-beda. Dengan demikian, temuan ini diharapkan dapat memberikan kontribusi bagi mahasiswa pendidikan matematika dalam memahami setiap teknik pengintegralan lanjutan.

UCAPAN TERIMA KASIH

Kami mengucapkan terima kasih kepada seluruh pihak yang telah terlibat dan memberikan dukungan dalam penyusunan artikel ini. Ucapan terima kasih khususnya kepada dosen pengampu yang sudah memberikan arahan dan kesempatan kepada kami dalam membuat artikel. Kami juga berterima kasih kepada rekan-rekan yang telah memberikan saran dan masukan selama proses pembuatan artikel berlangsung. Kontribusi yang diberikan sangat membantu dalam pembuatan artikel ini.

DAFTAR RUJUKAN

- Nurrasa, S., & Nurrohman, H. (2024). Analisis Kesalahan Mahasiswa Dalam Menggunakan Teknik Integral Substitusi Dan Parsial Berdasarkan Newmann's Error Analysis. *AB-JME: Al-Bahjah Journal of Mathematics Education*, 2(2), 110-123.
<https://www.jurnal.staialbahjah.ac.id/index.php/abjme/article/download/253/76>
- Strang, G., & Herman, E. J. (2016, March 30). *Calculus Volume 2*. OpenStax.
<https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/1-introduction>
- LINGARAJU M P. Integration of Trigonometric Functions Using Substitution Methods. *World Journal of Advanced Research and Reviews*, 2021, 11(1), 299-302. Article DOI:
<https://doi.org/10.30574/wjarr.2021.11.1.0328>
- Luo, ZQ., Luo, QM. A q -analogue for partial-fraction decomposition of a rational function and its application. *Adv Cont Discr Mod* 2024, 18 (2024).
<https://doi.org/10.1186/s13662-024-03814-7>
- Cieřliński, J.L.; Jurgielewicz, M. On Geometric Interpretations of Euler's Substitutions. *Symmetry* 2023, 15, 1932.
<https://doi.org/10.3390/sym15101932>
- Listiana, Y., Wulandari, & Fajriana. (2021). *Buku ajar: Kalkulus integral*. Bandar Publishing.
<http://repository.unimal.ac.id/7623/>

- Septiani, R. D., & Harisman, Y. (2025). Studi Pemahaman Kalkulus: Uji Kemampuan Mahasiswa Pendidikan Matematika dalam Perhitungan Integral dan Diferensial. *Jurnal Riset Pembelajaran Matematika Sekolah*, 9(1), 28-42.
<https://journal.unj.ac.id/unj/index.php/jrpms/article/view/52930/19335>
- Monariska, E. (2019). Analisis kesulitan belajar mahasiswa pada materi integral. *Jurnal Analisa*, 5(1), 9-19.
<https://journal.uinsgd.ac.id/index.php/analisa/article/view/4181/3055>
- Anggoro, A. Y. (2023). Analisis Kesalahan Mahasiswa Pendidikan Matematika Dalam Menyelesaikan Soal Kalkulus Integral. *Asimtot: Jurnal Kependidikan Matematika*, 4(2), 131-140.
<https://journal.unwira.ac.id/index.php/ASIMTOT/en/article/view/2340/703>
- Garak, S. S. (2023). Analisis Kesulitan Mahasiswa Matematika Dalam Integral Dasar. *Sepren*, 5(01), 01-07.
<https://jurnal.uhn.ac.id/index.php/sepren/article/view/1128/514>
- Utari, R. S., & Utami, A. (2019). Kemampuan pemahaman konsep mahasiswa dalam mengidentifikasi penyelesaian soal integral tak tentu dan tentu. *Jurnal Pendidikan Matematika*, 14(1), 39-50.
https://www.researchgate.net/publication/338997732_KEMAMPUAN_PEMAHAMAN_KONSEP_MAHASISWA_DALAM_MENGIDENTIFIKASI_PENYELESAIAN_SOAL_INTEGRAL_TAK_TENTU_DAN_TENTU
- Snyder, H. (2019). Literature review as a research methodology: An overview and guidelines. *Journal of business research*, 104, 333-339.
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0148296319304564?via%3Dihub>
- Barry, E. S., Merkebu, J., & Varpio, L. (2022). State-of-the-art literature review methodology: A six-step approach for knowledge synthesis. *Perspectives on Medical Education*, 11(5), 281-288.
<https://pmejournal.org/articles/10.1007/S40037-022-00725-9>
- Kraus, S., Breier, M., Lim, W. M., Dabić, M., Kumar, S., Kanbach, D., ... & Ferreira, J. J. (2022). Literature reviews as independent studies: guidelines for academic practice. *Review of managerial science*, 16(8), 2577-2595.
<https://link.springer.com/article/10.1007/s11846-022-00588-8>
- van Wee, B., & Banister, D. (2024). Literature review papers: the search and selection process. *Journal of Decision Systems*, 33(4), 559-565.
<https://www.tandfonline.com/doi/epdf/10.1080/12460125.2023.2197703?needAccess=true>