KAJIAN TRANSFORMASI FOURRIER

FATAHILLAH
Program Studi Pendidikkan Fisika
FMIPA Universitas Indraprasta PGRI
Email: drs.fatahillah@gmail.com

Abstrak. Suatu segmen fungsi yang dapat dinyatakan dalam bentuk periodik dinamakan dengan deret fourrier.Diskusi panel ini berjudul “Kajian Transformasi Fourrier”. Ada 2 integral dalam deret fourrier yaitu “pengintegralan kontinu dan pengintegralan semi kontinu (secara bersamaan), dan ini dinamakan “Transformasi Fourrier”.Semi kontinu yaitu bila penjumlahan suatu deret berjalan dari 0 sampai tak hingga.

Kata kunci:Transformasi, Fourrier, Periodik

Abstract. *A function segmen that is periodically called a fourrier series.In this panel dicussion entitled “Fourrier Transformation Studies”. There are 2 integrations in fourrier series, namely: continous and semi continous degradation (because of integration simultaneusly), then called the fourrier transformation. Semi continous when n moves from 0 to infinity.*

Keywords: Transfomation, Fourrier, Periodics

PENDAHULUAN

Pada seminar terbatas ini akan diperkenalkan 2 macam pengintegralan yang terkandung dalam suatu deret fourrier.Dalam penulisan ini penulis pernah berkonsultasi dengan kakak kelas penulis tahun 1976 di ITB Bandung yang bernama Erwin Sucipto yang sekarang beliau menjadi guru besar di Bethel Colledge, Prof Emerittus. Erwin Sucipto, Ph.D, dinegara bagian Indiana Amerika Serikat.

Disini terlebih dahulu sebagai pembukaan akan dibahas tentang deret fourrier dan konstanta-konstantanya.

METODE

Penulisan ini hanya berdasarkan studi literatur yang disertai dengan pengembangan penulis sendiri.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Deret Fourrier

Setiap potongan fungsi dalam domain tertentu dapat dinyatakan dengan bentuk deret periodik yaitu deret fourrier. Batasan daerah ini dinamakan periodisitas dengan lambang huruf L atau 2π. Bentuk umum deret fourrier adalah: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

Berdasarkan jenis ke periodikkannya, maka ada 2 macam deret fourrier yaitu:

Jika periodisitasnya dalam satuan sudut (radial)maka:

$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, a_0, a_n dan b_n adalah konstanta-konstanta dimana:

- $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{x=0}^{2\pi} f(x)dx$
- $a_n = \frac{2}{2\pi}\int_{x=0}^{2\pi} f(x)\cos nx\, dx$
- $b_n = \frac{2}{2\pi}\int_{x=0}^{2\pi} f(x)\sin nx\, dx$

Jika periodisitasnya dinyatakan dalam satuan panjang, maka:

$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{2n\pi x}{L}\right)$, dimana:

- $a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx$
- $a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{2n\pi x}{L}\,dx$
- $b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{2n\pi x}{L}\,dx$

Dalam menentukan konstanta-konstanta deret kita perlu meninjau jenis fungsi $f(x)$ tersebut berbentuk fungsi genap atau fungsi ganjil atau fungsi campuran yaitu fungsi tidak genap dan tidak ganjil, seperti:

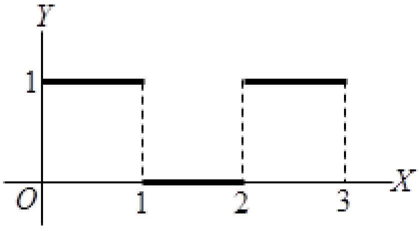
Fungsi genap bila: $f(x) = f(-x)$, hanya konstanta a_0 dan konstanta a_n yang dicari.

Fungsi ganjil bila: $f(x) = -f(-x)$, hanya konstanta b_n yang dicari

Fungsi tidak genap dan tidak ganjil maka semua konstanta harus dicari.

Contoh:

Tentukanlah bentuk deret fourrier dari fungsi seperti pada gambar:



Dari gambar terlihat bahwa:

- $L = 2$
- Termasuk fungsi tidak genap dan tidak ganjil, berarti semua konstanta dicari.
- $f(x)\begin{cases} = 1, bila: 0 < x < 1 \\ = 0, bila: 1 < x < 2 \end{cases}$

Sehingga:

- $a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 1dx + \int_1^2 0dx\right) = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 dx + 0\right)$
  $= \frac{1}{2}(x|_0^1) = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}$
- $a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{2n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos\frac{2n\pi x}{2}\,dx = \int_0^2 f(x)\cos n\pi x\,dx$
  $= \int_0^1 1\cos n\pi x\,dx + \int_0^1 0\cos n\pi x\,dx = \int_0^1 \cos n\pi x\,dx + 0 = \int_0^1 \cos n\pi x\,dx$
  $= \frac{1}{n\pi}(\sin n\pi x|_0^1) = \frac{1}{n\pi}(\sin n\pi - \sin 0) = \frac{1}{n\pi}(0-0) = 0$
- $b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{2n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\sin\frac{2n\pi x}{2}\,dx = \int_0^2 f(x)\sin n\pi x\,dx$
  $= \int_0^1 1\sin n\pi x\,dx + \int_1^2 0\sin n\pi x\,dx = \int_0^1 \sin n\pi x\,dx + 0 = -\int_0^1 -\sin n\pi x\,dx$
  $= \frac{1}{n\pi}\int_1^0 d(\cos n\pi x) = \frac{1}{n\pi}(\cos n\pi x|_1^0) = \frac{1}{n\pi}(\cos 0 - \cos n\pi) = \frac{1}{n\pi}(1-\cos n\pi)$
  $= \frac{(1-\cos n\pi)}{n\pi}$
  $b_n = \frac{1-\cos n\pi}{n\pi}$, maka: $b_1 = \frac{1-\cos\pi}{\pi} = \frac{1-(-1)}{\pi} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{1}$, $b_2 = \frac{1-\cos 2\pi}{2\pi} = \frac{1-1}{2\pi} = 0$
  $b_3 = \frac{1-\cos 3\pi}{3\pi} = \frac{1-(-1)}{3\pi} = \frac{2}{3\pi} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{3}$, $b_4 = \frac{1-\cos 4\pi}{4\pi} = \frac{1-1}{4\pi} = 0$

Sehingga: $b_{2n} = 0$ dan $b_{2n+1} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{2n+1}$

Jadi deret fourriernya adalah: $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)\pi x}{2n+1}$

Integral Fourrier

Seperti yang telah dibahas tentang deret fourrier diatas yaitu:

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, dimana:

$a_n = \frac{2}{2\pi}\int_{x=0}^{2\pi} f(x)\cos nx\, dx$

$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\sin nx\, dx$

Penjumlahan yang berjalan dari 0 menuju∞, mengisyaratkan kepadatan penjumlahan sehingga penjumlahan dapat diganti dengan bentuk integral sbb:

$f(x) = \int_{n=0}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)dn$

Ada 3 fungsi $f(x)$ yaitu fungsi genap, fungsi ganjil dan fungsi campuran (tidak genap dan tidak ganjil).

Untuk fungsi genap dimana: $a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{x=0}^{2\pi} f(x)\cos nx\, dx$ dan $b_n = 0$, sehingga:

$f(x) = \int_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx\, dn = \int_{n=0}^{\infty}\int_{x=0}^{2\pi} f(x)\cos nx\, dx \cos nx\, dn$

$= \int_{n=0}^{\infty}\int_{x=0}^{2\pi} f(x)\cos nx \cos nx\, dx\, dn = \int_{n=0}^{\infty}\int_{x=0}^{2\pi} f(x)\cos^2 nx\, dx\, dn$

Jadi:

$f(x) = \int_{n=0}^{\infty}\int_{x=0}^{2\pi} f(x)\cos^2 nx\, dx\, dn$

Untuk fungsi ganjil dimana: $a_n = 0$ dan $b_n = \frac{1}{2\pi}\int_{x=0}^{2\pi} f(x)\sin nx\, dx$, sehingga:

$f(x) = \int_{n=0}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)dn = \int_{n=0}^{\infty} b_n \sin nx\, dn$

$= \int_{n=0}^{\infty}\int_{x=0}^{2\pi} f(x)\sin nx\, dx \sin nx\, dn = \int_{n=0}^{\infty}\int_{x=0}^{2\pi} f(x)\sin nx \sin nx\, dx\, dn$

$= \int_{n=0}^{\infty}\int_{x=0}^{2\pi} f(x)\sin^2 nx\, dx\, dn$

Jadi:

$f(x) = \int_{n=0}^{\infty}\int_{x=0}^{2\pi} f(x)\sin^2 nx\, dx\, dn$

Untuk fungsi tidak genap dan tidak ganjil maka:

$f(x) = \int_{n=0}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)dn$

$= \int_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\cos nx\, dx \cos nx + \frac{2}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\sin nx\, dx \sin nx\right) dn$

$= \frac{2}{2\pi}\int_{n=0}^{\infty}\left(\int_{0}^{2\pi} f(x)\cos^2 nx\, dx + \int_{0}^{2\pi} f(x)\sin^2 nx\, dx\right) dn$

$= \frac{2}{2\pi}\int_{n=0}^{\infty}\left(\int_{0}^{2\pi} f(x)(\cos^2 nx + \sin^2 nx)dx\right) dn = \frac{2}{2\pi}\int_{n=0}^{\infty}\left(\int_{0}^{2\pi} f(x)dx\right) dn$

$= \frac{2}{2\pi}\int_{n=0}^{\infty}\int_{0}^{2\pi} f(x)dx\, dn$

Jika A_n diganti dengan $A(\alpha)$ dan B_n diganti dengan $B(\alpha)$, maka:

Maka Teorema Integral Fourier adalah:

$$f(x) = \int_{0}^{\infty}\{A(\alpha)\cos\alpha x + B(\alpha)\sin\alpha x\}d\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\text{dimana: } \begin{cases} A(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(x)\cos\alpha x\, dx \\ B(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(x)\sin\alpha x\, dx \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Dengan melihat hasil (1), jika x adalah suatu titik kesinambungan $f(x)$.

Jika x adalah suatu titik kesinambungan, kita harus menggantikan $f(x)$ dengan $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ seperti dikasus deret fourrier. Jangan catat bahwa itu diatas kondisi-kondisi adalah cukup tetapi perlu. Persamaan (1) dan (2) dengan bersesuaian hasil untuk deret fourrier adalah nyata. Sisi tangan kanan (1) kadang-kadang disebut suatu perluasan integral fourrier $f(x)$.

Teorema Integral Fourrier

Jika $f(x)$ fungsi kontinu sepotong demi sepotong pada setiap interval berhingga, memiliki derivative kiri maupun derivative kanan disekitar titik, dan integral: $\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 |f(x)|dx + \lim_{b\to\infty}\int_0^b |f(x)|dx$ ada, maka $f(x)$ dapat direpresentasikan oleh integral fourrier, seperti: $f(x) = \int_0^\infty \{A(\alpha)\cos\alpha x + B(\alpha)\sin\alpha x\}d\alpha$,

$$\begin{cases} A(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\alpha x\, dx \\ B(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\alpha x\, dx \end{cases}$$

Di titik di mana $f(x)$ tak kontinu, nilai interval sama dengan rata-rata darilimit kiri dan limit kanan $f(x)$ di titik tersebut.

Contoh :

Cari representasi integral Fourier dari fungsi $f(x) = \begin{cases} 1, jika: |x| < 1 \\ 0, jika: |x| > 1 \end{cases}$

Jawab:

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\alpha x\, dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{-1} f(x)\cos\alpha x\, dx + \int_{-1}^{1} f(x)\cos\alpha x\, dx + \int_{1}^{\infty} f(x)\cos\alpha x\, dx\right]$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{-1}(0)\cos\alpha x\, dx + \int_{-1}^{1}(1)\cos\alpha x\, dx + \int_{1}^{\infty}(0)\cos\alpha x\, dx\right] = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(1)\cos\alpha x\, dx$$
$$= \frac{1}{\alpha\pi}\int_{-1}^{1}\cos\alpha x\, d(\alpha x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\alpha}\int_{-1}^{1} d(\sin\alpha x) = \frac{1}{\alpha\pi}(\sin\alpha x|_{-1}^{1}) = \frac{1}{\alpha\pi}(\sin\alpha - \sin(-\alpha))$$
$$= \frac{1}{\alpha\pi}(\sin\alpha + \sin\alpha) = \frac{1}{\alpha\pi}2\sin\alpha = \frac{2\sin\alpha}{\alpha\pi} = \frac{2}{\pi}\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$
$$B(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\alpha x\, dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{-1} f(x)\sin\alpha x\, dx + \int_{-1}^{1} f(x)\sin\alpha x\, dx + \int_{1}^{\infty} f(x)\sin\alpha x\, dx\right]$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{-1}(0)\sin\alpha x\, dx + \int_{-1}^{1}(1)\sin\alpha x\, dx + \int_{1}^{\infty}(0)\sin\alpha x\, dx\right] = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(1)\sin\alpha x\, dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\frac{1}{\alpha}\int_{-1}^{1}\sin\alpha x\, d(\alpha x) = -\frac{1}{\alpha\pi}\int_{-1}^{1}\{-\sin\alpha x\, d(\alpha x)\} = = \frac{1}{\alpha\pi}\int_{-1}^{1} d(\cos\alpha x) =$$
$$-\frac{1}{\alpha\pi}(\cos\alpha x|_{-1}^{1}) = -\frac{1}{\alpha\pi}(\cos\alpha - \cos(-\alpha)) = \frac{1}{\alpha\pi}(\cos\alpha - \cos\alpha) = 0$$
$$f(x) = \int_0^\infty\{A(\alpha)\cos\alpha x + B(\alpha)\sin\alpha x\}d\alpha = \int_0^\infty\left\{\frac{2}{\pi}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cos\alpha x + 0\sin\alpha x\right\}d\alpha$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{2\sin\alpha\cos\alpha x}{\alpha}d\alpha = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}d(2\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin t}{t}dt$$

Transformasi Fourrier

Definisi:

Fungsi $F(\alpha)$ disebut transformasi fourrier dari fungsi $f(x)$ dan ditulis $F(\alpha) = F\{f(x)\}$ bila dari (4) akan diperoleh spt berikut:

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{i\alpha u}du \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

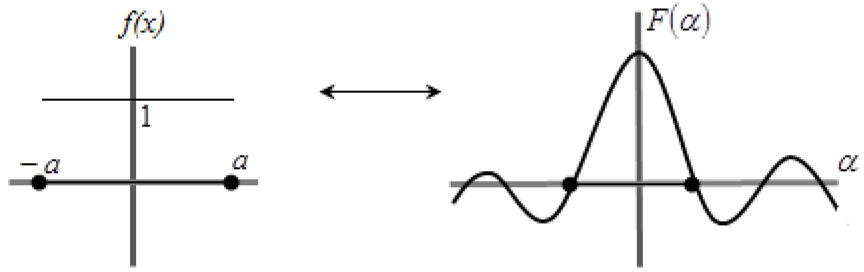
Sedangkan fungsi $f(x)$ disebut inverse transformasi fourrier dari fungsi $F(\alpha)$ dan ditulis:

$f(x) = F^{-1}\{F(\alpha)\}$, bila: $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)e^{-i\alpha u}d\alpha$ .... (8)

Contoh:

Carilah transformasi fourrier dari fungsi: $f(x) = \begin{cases} 1, bila: |x| < a \\ 0, bila: |x| > a \end{cases}$, dimana: a konstanta positip.

Gambarkanlah grafik fungsi $f(x)$ dan $F(\alpha) = F\{f(x)\}$ tersebut:



Jawab:

- $F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{i\alpha u}du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} 1.e^{i\alpha u}du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} e^{i\alpha u}du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{i\alpha}\int_{-a}^{a} d\left(e^{i\alpha u}\right)$

  $= \frac{1}{i\alpha\sqrt{2\pi}}\left(e^{i\alpha u}\Big|_{-a}^{a}\right) = \frac{1}{i\alpha\sqrt{2\pi}}\left(e^{ia\alpha} - e^{-ia\alpha}\right) = \frac{2}{\alpha\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e^{ia\alpha} - e^{-ia\alpha}}{2i}\right) = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin a\alpha}{\alpha}, \alpha \neq 0$

  $= \sqrt{\frac{4}{2\pi}}\frac{\sin(a\alpha)}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(a\alpha)}{\alpha}$

- $F(0) = \lim_{\alpha\to 0} F(\alpha) = \lim_{\alpha\to 0}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(a\alpha)}{\alpha}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{\sin(a\alpha)}{\alpha}\right) = a\sqrt{\frac{2}{\pi}}\lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{\sin(a\alpha)}{a\alpha}\right) = a\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

  Atau:

  $F(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{i\alpha u}du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}(1)e^{0}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(x|_{-a}^{a})$

  $= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(a - (-a)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(a + a) = 2a\frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \left(\sqrt{2}\right)^2 a\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}} = a\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} = a\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

Jadi: $F(\alpha) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(a\alpha)}{\alpha}, bila: \alpha \neq 0 \\ a\sqrt{\frac{2}{\pi}}, bila: \alpha = 0 \end{cases}$

Assignment 1:

1. Carilah transformasi fourrier dari fungsi: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, bila: |x| < a \\ 0, bila: |x| > a \end{cases}$, dimana: a = positip
2. Carilah transformasi fourrier dari fungsi: $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, bila: |x| < 1 \\ 0, bila: |x| > 1 \end{cases}$

Transformasi Cosinus Fourrier

Contoh:

Bila $f(x)$ fungsi genap, buktikanlah bahwa: $F_c(\alpha) = F\{f(x)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(u)\cos(\alpha u)\,du$ dan $f(x) = F^{-1}\{F_c(\alpha)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_c(\alpha)\cos(\alpha u)\,d\alpha$

Jawab:

a) $F_c(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{i\alpha u}du = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\{\cos(\alpha u) + i\sin(\alpha u)\}du$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\{\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos(\alpha u)\,du + i\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\sin(\alpha u)\,du\}$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\{2\int_0^\infty f(u)\cos(\alpha u)\,du\} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty f(u)\cos(\alpha u)\,du = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(u)\cos(\alpha u)\,du$

Mengingat bahwa $f(x)\cos(\alpha x)$ adalah fungsi genap dan $f(x)\sin(\alpha x)$ adalah fungsi ganjil (keduanya terhadap variable x)

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F_c(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F_c(\alpha)\{\cos(\alpha x) - i\sin(\alpha x)\}d\alpha$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F_c(\alpha)\cos(\alpha x)d\alpha - \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F_c(\alpha)\sin(\alpha x)\,d\alpha$
$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty F_c(\alpha)\cos(\alpha x)d\alpha = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty F_c(\alpha)\cos(\alpha x)d\alpha = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_c(\alpha)\cos(\alpha x)d\alpha$

Mengingat $F_c(\alpha)$ adalah fungsi genap yaitu: $F_c(-\alpha) = F_c(\alpha)$, untuk setiap α, dimana $f(x)$ adalah Transformasi Cosinus Fourrier.

Transformasi Sinus Fourrier

Fungsi $F_s(\alpha)$ disebut transformasi sinus fourrier dari fungsi $f(x)$ dan ditulis $F_s(\alpha) = F_s\{f(x)\}$, bila: $F_s(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(u)\sin(\alpha u)du$

Sedangkan fungsi $f(x)$ disebut transformasi inverse sinus fourrier dari fungsi $F_s(\alpha)$ dan ditulis:

$f(x) = F^{-1}\{F_s(\alpha)\}$, bila: $f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_s(\alpha)\sin(\alpha x)d\alpha$

Mengingat $F_s(\alpha)$ adalah fungsi ganjil yaitu $F_s(-\alpha) = -F_s(\alpha)$ untuk setiap harga α, dimana $f(x)$ adalah "Transformasi Sinus Fourrier".

Contoh:

1. Carilah transformasi sinus fourrier dari fungsi: $f(x) = \begin{cases} 1, bila: 0 < x < 1 \\ 0, bila: x > 1 \end{cases}$

   Jawab:

   $F_s(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(u)\sin(\alpha u)du = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\int_0^1 1.\sin(\alpha uu)du + \int_1^\infty 0.\sin(\alpha uu)du\right]$
   $= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[-\frac{1}{\alpha}\cos(\alpha u)\Big|_0^1\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[-\frac{1}{\alpha}(\cos\alpha - \cos 0)\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[-\frac{1}{\alpha}(\cos\alpha - 1)\right]$
   $= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[-\frac{\cos\alpha - 1}{\alpha}\right] = \frac{1-\cos\alpha}{\alpha}\sqrt{\frac{2}{\pi}}, \alpha \neq 0$

2. Carilah transformasi cosinus fourrier dari fungsi: $f(x) = e^{-x}, x \geq 0$

   Solusi:

$F_s(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(u)\cos(\alpha u)du = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\int_0^\infty e^{-u}\cos(\alpha u)\,du\right]$

$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\lim_{p\to\infty}\int_0^p e^{-u}\cos(\alpha u)\,du\right] =$

$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\lim_{p\to\infty}\left\{\frac{e^{-u}}{(-1)^2+\alpha^2}\left((-1)\cos(\alpha u)+\alpha\sin(\alpha)u\right)\Big|_0^p\right\}\right]$

$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\lim_{p\to\infty}\left\{\frac{e^{-u}}{(-1)^2+\alpha^2}(-\cos(\alpha p)+\alpha\sin(\alpha p))\right\}-\frac{e^0}{1+\alpha^2}(-\cos 0+\alpha\sin 0)\right]$

$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[0-\frac{e^0}{1+\alpha^2}(-1+0)\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{1}{1+\alpha^2}\right]$

Jadi: $F_s(\alpha) = \frac{1}{1+\alpha^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

Assignment 2:

1. Carilah transformasi cosinus fourrier dari fungsi: $f(x) = \begin{cases}1, bila: 0 < x < 1\\ 0, bila: x > 1\end{cases}$
2. Carilah transformasi sinus fourrier dari fungsi-fungsi:(a). $f(x) = e^{-x}, x \geq 0$ dan (b). $f(x) = e^{-2x}, x \geq 0$

Sifat ElementerTransformasi Fourrier

1. Linieritas, bila: $f_1(x) \leftrightarrow F_1(\alpha)$ dan $f_2(x) \leftrightarrow F_2(\alpha)$, maka:
   $a_1f_1(x) + a_2f_2(x) \leftrightarrow a_1F_1(\alpha) + a_2F_2(\alpha)$, dimana: a_1 dan a_2 adalah konstanta.
2. Time-shifting
   Bila: $f(x) \leftrightarrow F(\alpha)$, maka: $f(x - x_0) \leftrightarrow F(\alpha)e^{i\alpha x_0}$
3. Frequency-shifting, bila: $f(x) \leftrightarrow F(\alpha)$, maka: $f(x)e^{i\alpha x_0} \leftrightarrow F(\alpha - \alpha_0)$
4. Scaling, bila: $f(x) \leftrightarrow F(\alpha)$, maka untuk konstanta a yang bernilai real dan tidak sama dengan nol berlaku: $f(\alpha x) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\alpha}{a}\right)$
5. Time-reversal, bila: $f(x) \leftrightarrow F(\alpha)$, maka: $f(-x) \leftrightarrow -F(-\alpha)$
6. Simetri, bila: $f(x) \leftrightarrow F(\alpha)$, maka: $F(x) \leftrightarrow f(-\alpha)$

Contoh-contoh:

1. Buktikan sifat linieritas diatas
   Jawab:
   $F[a_1f_1(x) + a_2f_2(x)] = \int_{-\infty}^{\infty}[a_1f_1(x) + a_2f_2(x)]e^{-i\alpha x}dx$
   $= a_1\int_{-\infty}^{\infty}f_1(x)e^{-i\alpha x}dx + a_2\int_{-\infty}^{\infty}f_2(x)e^{-i\alpha x}dx = a_1F\{f_1(x)\} + a_2F\{f_2(x)\}$,

dimana:

   a_1 dan$a_2$adalah konstanta.
2. Buktikan sifat frequency-shifting diatas
   Jawab:
   $F\{f(x)e^{i\alpha_0 x}\} = \int_{-\infty}^{\infty}\{f(x)e^{i\alpha_0 x}\}e^{-i\alpha x}dx = \int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i(\alpha_0-\alpha)x}dx = F(\alpha - \alpha_0)$

PENUTUP

Simpulan

Integral Fourrier mempunyai sifat sbb:

1. Linieritas, bila: $f_1(x) \leftrightarrow F_1(\alpha)$ dan $f_2(x) \leftrightarrow F_2(\alpha)$, maka:
   $a_1f_1(x) + a_2f_2(x) \leftrightarrow a_1F_1(\alpha) + a_2F_2(\alpha)$, dimana: a_1 dan a_2 adalah konstanta.

2. Time-shifting, bila: $f(x) \leftrightarrow F(\alpha)$, maka: $f(x - x_0) \leftrightarrow F(\alpha)e^{i\alpha x_0}$
3. Frequency-shifting, bila: $f(x) \leftrightarrow F(\alpha)$, maka: $f(x)e^{i\alpha x_0} \leftrightarrow F(\alpha - \alpha_0)$
4. Scaling, bila: $f(x) \leftrightarrow F(\alpha)$, maka untuk konstanta a yang bernilai real dan tidak sama dengan nol berlaku: $f(ax) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\alpha}{a}\right)$
5. Time-reversal, bila: $f(x) \leftrightarrow F(\alpha)$, maka: $f(-x) \leftrightarrow -F(-\alpha)$
6. Simetri, bila: $f(x) \leftrightarrow F(\alpha)$, maka: $F(x) \leftrightarrow f(-\alpha)$

DAFTAR PUSTAKA

Abromowitz, Milton, and Irene A. Stegun, editors, *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, National Bureau of Standards, Applied Mathematical Series, 55, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C., 1964

Anton, Howard, *Elementary Linear Algebra*, Willey, New York, 2nd ed., 1977

Apostol, Tom M., *Calculus*, Blaisdeil, Waltham, Mass., 2nd ed., 1967

Arfken, George, *Mathematical Method for Physicists*, Academic Press, New York, 2nd ed., 1970

Bak, Thor A., and Jonas Lichtenberg, *Mathematics for Scientists*, Benjamin, New York, 1966

Bartle, Robert G., *The Element of Real Analysis*, Wiley, New York, 1964

Blies, Gilbert Ames, *Calculus of Variation*, Open Court, Chicago, 1925

Boyce,William E., and Richard C., DiPrima, *Introduction to Differential Equation*, Wiley, New York, 1970

Brauer, Fred, and John A., Nohel, *Differential Equations*: A First Course, Benjamin, Menlo Park, California, 2nd ed., 1973

Buck, R. Creighton, and Ellen F. Buck, *Advanced Calculus*, McGraw-Hill, New York, 3 nd ed, 1978

Butkov, Eugene, *Mathematical Physics*, Addison- Wesley, Reading, Mass., 1968

Byrd, P. F., and Morris D.Friedman, *Handbook of Elliptic Integrals for Engineer and Physicists*, Springer, Berlin-Gottingen-Heidelberg, 1954