



***Guided Discovery Learning* berbasis APOS: Alternatif Mengatasi Kesulitan Mahasiswa dalam Berpikir Reflektif Matematis**

Andri Suryana^{1*} dan Arfatin Nurrahmah²^{1,2} Universitas Indraprasta PGRI* E-mail: andrisuryana21@gmail.com

Info Artikel

Kata kunci:

Kemampuan berpikir reflektif matematis, Pengantar teori peluang, *Guided discovery learning* berbasis APOS, *Direct learning*

Abstrak

Tujuan penelitian ini adalah untuk menganalisis kesulitan mahasiswa yang telah memperoleh *Guided Discovery Learning* berbasis APOS dan *Direct Learning* dalam menyelesaikan soal berpikir reflektif matematis pada Mata Kuliah Pengantar Teori Peluang. Penelitian ini merupakan penelitian kualitatif. Adapun subjek dalam penelitian ini adalah mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika yang mengambil Mata Kuliah Pengantar Teori Peluang di salah satu PTS di Jakarta Timur. Teknik sampling yang digunakan berupa *purposive sampling* sedangkan instrumen yang digunakan adalah dokumen (hasil tes kemampuan awal matematis dan kemampuan berpikir reflektif matematis mahasiswa), lembar observasi, pedoman wawancara, dan peneliti. Data penelitian ini dikumpulkan dengan teknik triangulasi. Adapun hasil dari penelitian ini adalah mahasiswa masih mengalami kesulitan, baik secara keseluruhan maupun berdasarkan level kemampuan awal matematis, dalam menyelesaikan soal berpikir reflektif matematis pada kedua pembelajaran. Namun, mahasiswa yang telah memperoleh *Guided Discovery Learning* berbasis APOS mengalami kesulitan yang lebih rendah daripada mahasiswa yang telah memperoleh *Direct Learning*. Adapun kesulitan paling banyak yang dialami mahasiswa pada kedua pembelajaran terletak pada indikator ‘menganalogi dari beberapa masalah matematika yang serupa disertai alasan’ dan ‘menyusun bentuk umum terkait proses matematika disertai alasan’.

How to Cite: Suryana, A & Nurrahmah, A. (2020). *Guided Discovery Learning* berbasis APOS: Alternatif Mengatasi Kesulitan Mahasiswa dalam Berpikir Reflektif Matematis. *Prosiding Seminar Nasional Sains 2020*, 1(1): 361-372.

PENDAHULUAN

Pengantar Teori Peluang merupakan salah satu mata kuliah di program studi Matematika dan Pendidikan Matematika yang memiliki karakteristik: (1) materi bersifat abstrak, (2) membutuhkan kemampuan dalam menggeneralisasi dan mensintesis, (3) menekankan pada aspek penalaran deduktif/pembuktian, (4) memerlukan pemahaman secara analitik dan geometrik, serta (5) memerlukan ide-ide kreatif (Suryana, 2019). Berdasarkan karakteristik tersebut, terlihat bahwa untuk mempelajari mata kuliah Pengantar Teori Peluang diperlukan beragam kemampuan matematis, salah satunya adalah kemampuan berpikir reflektif matematis.

Kemampuan berpikir reflektif matematis merupakan kemampuan matematis yang dapat membantu mahasiswa dalam mengidentifikasi prinsip yang termuat dalam kasus/proses solusi matematika, memeriksa kebenaran argumen atau proses solusi matematika, mengidentifikasi data relevan dan tidak relevan dalam menyelesaikan masalah matematika, menganalogi dari beberapa masalah matematika yang serupa, serta menyusun bentuk umum terkait proses matematika (Sumarmo, 2013). Namun, berbagai studi menunjukkan bahwa kemampuan berpikir reflektif matematis mahasiswa masih tergolong rendah (Nindiasari, dkk., 2014; Nuriana, dkk., 2018; dan Lestari, dkk., 2019). Akibatnya, mereka mengalami kesulitan dalam menyelesaikan soal berpikir reflektif matematis karena mereka terbiasa diajar menggunakan pembelajaran klasikal. Pembelajaran

tersebut ternyata belum dapat mengembangkan beragam kemampuan matematis mahasiswa secara optimal (Nindiasari, dkk., 2014).

Untuk mengembangkan kemampuan berpikir reflektif matematis mahasiswa pada mata kuliah Pengantar Teori Peluang, dosen diharapkan dapat memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk aktif dalam pembelajaran dan dapat mengkonstruksi sendiri konsep yang dipelajari. Oleh karena itu, dibutuhkan pembelajaran inovatif yang berlandaskan konstruktivisme. Salah satu pembelajaran inovatif yang diduga dapat mengembangkan kemampuan berpikir reflektif matematis adalah *Guided Discovery Learning* berbasis APOS.

Guided Discovery Learning merupakan pembelajaran yang memberikan kesempatan pada mahasiswa untuk melakukan upaya coba-coba, penyelidikan, dan menarik kesimpulan dalam rangka menemukan pengetahuan baru. Pembelajaran ini memberikan peluang kepada dosen untuk melakukan bimbingan dan arahan dalam rangka memberikan bantuan agar mahasiswa dapat mengoptimalkan gagasan, konsep, dan strategi untuk menemukan pengetahuan yang baru (Isnarto, *et al.*, 2014). *Guided Discovery Learning* merupakan modifikasi dari *Discovery Learning*. Bimbingan (*guide*) yang diberikan oleh dosen bertujuan untuk memberikan bantuan kepada mahasiswa dalam rangka mengarahkan upaya mahasiswa menuju penemuan pengetahuan baru. Hal ini ditujukan untuk menghindari kebuntuan langkah apabila pembelajaran yang digunakan adalah murni penemuan (*discovery*) (Isnarto, *et al.*, 2014).

Untuk mengoptimalkan gagasan dan strategi mahasiswa dalam menemukan pengetahuan baru, dosen memberikan lembar kerja sebagai bentuk dari ‘*guide*’ agar proses penemuan menjadi terarah. Lembar kerja yang digunakan berbasis APOS. APOS merupakan suatu teori konstruktivisme tentang bagaimana mahasiswa mengkonstruksi konsep melalui 4 hal, yaitu Aksi (*Actions*), Proses (*Processes*), Objek (*Objects*), dan Skema (*Schema*) (Herlina, 2015). Dalam mengimplementasikan ke-4 hal tersebut, maka dapat dilakukan melalui siklus ACE, yaitu aktivitas (*Activities*), diskusi kelas (*Class discussion*), dan latihan soal (*Exercises*) (Suryadi, 2012). Siklus tersebut mengacu pada prinsip-prinsip *discovery*. Dalam mengimplementasikan *Guided Discovery Learning* berbasis APOS, perlu dipertimbangkan faktor kemampuan awal matematis (KAM) mahasiswa. Hal ini penting untuk diperhatikan dalam proses pembelajaran matematika (Suryadi, 2012), serta diprediksi memiliki kontribusi terhadap hasil penelitian.

Untuk dapat mengetahui lebih jauh terkait implementasi *Guided Discovery Learning* berbasis APOS dalam mengatasi kesulitan mahasiswa terkait soal berpikir reflektif matematis, maka dilakukan suatu penelitian dengan judul “*Guided Discovery Learning* berbasis APOS: Alternatif Mengatasi Kesulitan Mahasiswa dalam Berpikir Reflektif Matematis”. Bentuk kebaruan dari penelitian ini adalah analisis terkait kesulitan mahasiswa yang diteliti berdasarkan keseluruhan, level KAM, dan indikator kemampuan berpikir reflektif matematis sebagai akibat dari implementasi *Guided Discovery Learning* berbasis APOS dan *Direct Learning*. Adapun indikator kemampuan berpikir reflektif matematis yang digunakan dalam penelitian ini menggunakan teori dari Sumarmo (2013), yaitu: (1) mengidentifikasi prinsip yang termuat dalam kasus/proses solusi matematika disertai alasan, (2) memeriksa kebenaran argumen atau proses solusi matematika, (3) mengidentifikasi data relevan dan tidak relevan dalam menyelesaikan masalah matematika, (4) menganalogi dari beberapa masalah matematika yang serupa disertai alasan, serta (5) menyusun bentuk umum terkait proses matematika disertai alasan.

Berdasarkan uraian di atas, rumusan masalah dalam penelitian ini adalah ‘Bagaimanakah kesulitan yang dialami mahasiswa, baik yang telah memperoleh *Guided Discovery Learning* berbasis APOS maupun *Direct Learning*, dalam menyelesaikan soal berpikir reflektif matematis pada Mata Kuliah Pengantar Teori Peluang berdasarkan keseluruhan, level KAM, serta indikator kemampuan berpikir reflektif matematis?’. Adapun tujuan dari penelitian ini adalah untuk menganalisis kesulitan mahasiswa yang telah memperoleh *Guided Discovery Learning* berbasis APOS dan *Direct Learning* dalam menyelesaikan soal berpikir reflektif matematis pada Mata Kuliah Pengantar Teori Peluang berdasarkan keseluruhan, level KAM, serta indikator kemampuan berpikir reflektif matematis. Penelitian ini diharapkan dapat menjadi suatu referensi serta wacana bagi para praktisi pendidikan matematika dalam upaya mengatasi kesulitan mahasiswa dalam mempelajari Mata Kuliah Pengantar Teori Peluang, terutama yang berkaitan dengan soal berpikir reflektif matematis.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilaksanakan di salah satu PTS di Jakarta Timur. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode kualitatif. Adapun subjek dalam penelitian ini adalah mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika yang mengambil Mata Kuliah Pengantar Teori Peluang tahun akademik 2019/2020 sebanyak 64 mahasiswa yang berasal dari 2 kelas paralel, yaitu 1 kelas memperoleh *Guided Discovery Learning* berbasis APOS yang berjumlah 26 mahasiswa dan 1 kelas lainnya memperoleh *Direct Learning* yang berjumlah 38 mahasiswa. Untuk teknik samplingnya, peneliti menggunakan *purposive sampling* dan sumber datanya berasal dari mahasiswa sebagai subjek penelitian. Penelitian ini menggunakan beragam instrumen, yaitu dokumen (hasil tes kemampuan awal matematis dan kemampuan berpikir reflektif matematis mahasiswa), lembar observasi, pedoman wawancara, dan peneliti. Tes Kemampuan Awal Matematis (KAM) dan tes Kemampuan Berpikir Reflektif Matematis (KBRM) yang digunakan dalam penelitian ini sudah divalidasi sehingga siap untuk digunakan dalam penelitian. Adapun metode pengumpulan data yang digunakan adalah metode triangulasi, sedangkan teknik analisis datanya menggunakan Model Miled dan Huberman. Aktivitas analisis data dalam model tersebut meliputi reduksi data, display data, dan kesimpulan/verifikasi (Sugiyono, 2011). Untuk uji keabsahan datanya, peneliti menggunakan uji kredibilitas (melalui triangulasi), uji transferabilitas, uji depenabilitas, serta uji konfirmabilitas. Untuk teknik pengelompokan KAM mahasiswa, peneliti menggunakan aturan Noer (Suryana, 2016) yang dimodifikasi. Adapun aturannya dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1. Kriteria Pengelompokan KAM Mahasiswa

Skor KAM (X)	Kategori
$X \geq 70\%$	KAM Tinggi
$60\% \leq X < 70\%$	KAM Sedang
$X < 60\%$	KAM Rendah

HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil

Data Kemampuan Awal Matematis (KAM)

Data KAM dianalisis sebelum penelitian yang bertujuan untuk mengelompokkan KAM mahasiswa ke dalam 3 level, yaitu tinggi, sedang, dan rendah. Adapun hasilnya disajikan pada tabel berikut ini.

Tabel 2. Statistik Deskriptif Data KAM

No.	Kelompok Pembelajaran	n	\bar{x}	s
1	<i>Guided Discovery Learning</i> berbasis APOS (GDLbA)	26	64,88	7,27
2	<i>Direct Learning</i> (DL)	38	64,61	6,72
Total		64		

Keterangan: Skor Ideal KAM = 100

Berdasarkan Tabel 2, terlihat bahwa rerata dan simpangan baku dari skor KAM pada kedua kelompok pembelajaran relatif sama. Hal ini memperkuat alasan bahwa penentuan kelompok pembelajaran dapat dilakukan secara acak dan keduanya dapat dibandingkan. Selanjutnya, mahasiswa dikelompokkan berdasarkan skor KAM ke dalam 3 level, yaitu tinggi, sedang dan rendah. Adapun teknik pengelompokannya menggunakan aturan Noer (Suryana, 2016) yang dimodifikasi. Berikut ini diberikan hasil pengelompokan KAM mahasiswa pada masing-masing kelompok pembelajaran.

Tabel 3. Sebaran Subjek Penelitian

Level KAM	Kelompok Pembelajaran		Total
	GDLbA	DL	
Tinggi	7	9	16
Sedang	13	19	32
Rendah	6	10	16
Total	26	38	64

Data Kemampuan Berpikir Reflektif Matematis (KBRM)

Data KBRM yang dianalisis berasal dari data postes. Hal ini dilakukan untuk mengetahui pencapaian kemampuan berpikir reflektif matematis mahasiswa yang memperoleh *Guided Discovery Learning* berbasis APOS (GDLbA) dan *Direct Learning* (DL). Adapun datanya diberikan pada tabel berikut ini.

Tabel 4. Data Pencapaian KBKM

Indikator KBRM	KAM	Stat.	Postes	
			GDLbA	DL
Mengidentifikasi prinsip yang termuat dalam kasus/proses solusi matematika disertai alasan (Skor Ideal = 10)	Tinggi	\bar{x} %	8,43 (84,29%)	8,11 (81,11%)
	Sedang	\bar{x} %	7,23 (72,31%)	7,16 (71,58%)
	Rendah	\bar{x} %	6,67 (66,67%)	6,40 (64,00%)
	Total	\bar{x} %	7,42 (74,23%)	7,18 (71,84%)
Memeriksa kebenaran argumen atau proses solusi matematika (Skor Ideal = 10)	Tinggi	\bar{x} %	7,86 (78,57%)	7,56 (75,56%)
	Sedang	\bar{x} %	6,77 (67,69%)	6,68 (66,84%)
	Rendah	\bar{x} %	6,50 (65,00%)	6,20 (62,00%)
	Total	\bar{x} %	7,00 (70,00%)	6,76 (67,63%)
Mengidentifikasi data relevan dan tidak relevan dalam menyelesaikan masalah matematika (Skor Ideal = 10)	Tinggi	\bar{x} %	8,71 (87,14%)	8,33 (83,33%)
	Sedang	\bar{x} %	7,69 (76,92%)	7,37 (73,68%)
	Rendah	\bar{x} %	7,33 (73,33%)	6,60 (66,00%)
	Total	\bar{x} %	7,88 (78,85%)	7,39 (73,95%)
Menganalogi dari beberapa masalah matematika yang serupa disertai alasan (Skor Ideal = 10)	Tinggi	\bar{x} %	6,43 (64,29%)	6,22 (62,22%)
	Sedang	\bar{x} %	6,15 (61,54%)	6,00 (60,00%)
	Rendah	\bar{x} %	5,67 (56,67%)	5,50 (55,00%)
	Total	\bar{x} %	6,12 (61,15%)	5,92 (59,21%)
Menyusun bentuk umum terkait proses matematika disertai alasan (Skor Ideal = 10)	Tinggi	\bar{x} %	6,57 (65,71%)	6,44 (64,44%)
	Sedang	\bar{x} %	5,92 (59,23%)	5,84 (58,42%)
	Rendah	\bar{x} %	5,83 (58,33%)	5,60 (56,00%)
	Total	\bar{x} %	6,08 (60,77%)	5,92 (59,21%)

Berdasarkan Tabel 4, diperoleh temuan bahwa untuk semua indikator KBRM, rerata pencapaian mahasiswa secara keseluruhan dan berdasarkan level KAM yang memperoleh *Guided Discovery Learning* berbasis APOS lebih tinggi daripada mahasiswa yang memperoleh *Direct*

Learning. Selain itu, diperoleh temuan juga bahwa secara keseluruhan dan berdasarkan level KAM, pencapaian KBRM mahasiswa yang memperoleh *Guided Discovery Learning* berbasis APOS maupun *Direct Learning* pada indikator ‘menganalogi dari beberapa masalah matematika yang serupa disertai alasan’ dan ‘menyusun bentuk umum terkait proses matematika disertai alasan’ ternyata lebih rendah daripada indikator ‘mengidentifikasi prinsip yang termuat dalam kasus/proses solusi matematika disertai alasan’, ‘memeriksa kebenaran argumen atau proses solusi matematika’, serta ‘mengidentifikasi data relevan dan tidak relevan dalam menyelesaikan masalah matematika’.

Pembahasan

Dalam menyelesaikan soal berpikir reflektif matematis pada Mata kuliah Pengantar Teori Peluang, diperoleh temuan bahwa secara umum mahasiswa masih mengalami kesulitan, baik yang memperoleh *Guided Discovery Learning* berbasis APOS maupun *Direct Learning*, meskipun kesulitan yang dialami mahasiswa pada *Guided Discovery Learning* berbasis APOS lebih rendah daripada mahasiswa yang memperoleh *Direct Learning*. Untuk mengetahui lebih jauh terkait temuan tersebut, berikut ini diuraikan kesulitan-kesulitan mahasiswa dalam menyelesaikan soal kemampuan berpikir reflektif matematis pada Mata kuliah Pengantar Teori Peluang berdasarkan keseluruhan, level KAM, serta indikator KBRM secara triangulasi.

Indikator ‘Mengidentifikasi prinsip yang termuat dalam kasus/proses solusi matematika disertai alasan’ pada KBRM

Untuk indikator ‘mengidentifikasi prinsip yang termuat dalam kasus/proses solusi matematika disertai alasan’ pada KBRM, rerata pencapaian mahasiswa secara keseluruhan dan berdasarkan level KAM yang memperoleh *Guided Discovery Learning* berbasis APOS ternyata lebih tinggi daripada mahasiswa yang memperoleh *Direct Learning*. Hal ini dapat dilihat pada Tabel 4. Dengan kata lain, mahasiswa yang memperoleh *Guided Discovery Learning* berbasis APOS secara keseluruhan dan berdasarkan level KAM pada indikator ‘mengidentifikasi prinsip yang termuat dalam kasus/proses solusi matematika disertai alasan’, mengalami kesulitan yang lebih rendah dalam menyelesaikan soal KBRM daripada mahasiswa yang memperoleh *Direct Learning*. Untuk memperkuat hasil analisis deskriptif tersebut, maka analisis dilanjutkan pada analisis dokumen (jawaban tes KBRM mahasiswa berdasarkan level KAM), hasil observasi, dan wawancara (triangulasi). Adapun soal KBRM yang mengungkap indikator ‘mengidentifikasi prinsip yang termuat dalam kasus/proses solusi matematika disertai alasan’ pada Mata kuliah Pengantar Teori Peluang adalah sebagai berikut:

Mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika di perguruan tinggi X berasal dari latar belakang sosial ekonomi yang beragam, yaitu 24% orang tuanya bekerja sebagai PNS, 30% orang tuanya bekerja sebagai wiraswasta, 21% orang tuanya bekerja sebagai pegawai swasta dan 25% orang tuanya bekerja di bidang lain. Dari komposisi mahasiswa tersebut, tercatat bahwa 4,25% orang tuanya bekerja sebagai PNS; 2,15% orang tuanya bekerja sebagai wiraswasta; 3,5% orang tuanya bekerja sebagai pegawai swasta; dan 2,35% orang tuanya bekerja di bidang lain merupakan mahasiswa ber-IPK > 3,00. Seandainya Anda diminta untuk menentukan peluang terpilihnya seorang mahasiswa ber-IPK > 3,00 yang orang tuanya bekerja sebagai PNS dengan syarat bahwa mahasiswa tersebut dipilih secara acak, maka konsep apa yang Anda gunakan untuk menyelesaikan soal tersebut dan berikan alasannya!

Soal di atas bertujuan untuk mengungkap kemampuan mahasiswa dalam mengidentifikasi prinsip yang termuat dalam kasus/proses solusi matematika disertai alasan terkait peluang suatu kejadian. Adapun hasil analisis dokumen (jawaban tes KBRM mahasiswa berdasarkan level KAM), observasi, dan wawancara terkait indikator ‘mengidentifikasi prinsip yang termuat dalam kasus/proses solusi matematika disertai alasan’ adalah sebagai berikut:

1. Untuk mahasiswa dengan KAM tinggi, baik yang memperoleh *Guided Discovery Learning* berbasis *APOS* maupun *Direct Learning*, umumnya mereka tidak mengalami kesulitan yang berarti dalam menuliskan konsep yang dibutuhkan dalam menyelesaikan soal tersebut. Namun, ada beberapa mahasiswa dari kelompok pembelajaran '*Direct Learning*' ternyata kurang lengkap dalam memberikan alasan terkait konsep yang akan digunakan dalam menyelesaikan soal tersebut.
2. Untuk mahasiswa dengan KAM sedang yang memperoleh *Guided Discovery Learning* berbasis *APOS*, mereka tidak mengalami kesulitan yang berarti dalam menuliskan konsep yang digunakan dalam menyelesaikan soal tersebut. Namun, jawaban mereka kadangkala kurang lengkap dalam memberikan alasan terkait konsep yang digunakan. Lain halnya dengan mahasiswa yang memperoleh *Direct Learning*, beberapa di antaranya masih mengalami kesulitan dalam memberikan alasan terkait konsep yang digunakan dalam menyelesaikan soal tersebut meskipun konsep yang mereka tulis bernilai benar. Hal ini terlihat dari alasan mereka di dalam lembar jawaban terkait konsep yang digunakan dalam menyelesaikan soal tersebut yang kurang relevan.
3. Untuk mahasiswa dengan KAM rendah yang memperoleh *Guided Discovery Learning* berbasis *APOS*, beberapa di antaranya masih mengalami kesulitan dalam memberikan alasan terkait konsep yang digunakan dalam menyelesaikan soal tersebut meskipun konsepnya benar. Hal ini terlihat dari paparan mereka di dalam lembar jawaban terkait alasan dari konsep yang digunakan dalam menyelesaikan soal tersebut yang kurang relevan. Lain halnya dengan mahasiswa yang memperoleh *Direct Learning*, ternyata beberapa mahasiswa masih mengalami kesulitan dalam menentukan konsep yang akan digunakan dalam menyelesaikan soal tersebut.

Indikator 'Memeriksa kebenaran argumen atau proses solusi matematika' pada KBRM

Berdasarkan Tabel 4, diperoleh temuan bahwa rerata pencapaian mahasiswa secara keseluruhan dan berdasarkan level KAM yang memperoleh *Guided Discovery Learning* berbasis *APOS* untuk indikator 'memeriksa kebenaran argumen atau proses solusi matematika' pada KBRM ternyata lebih tinggi daripada mahasiswa yang memperoleh *Direct Learning*. Hal ini berarti, mahasiswa yang memperoleh *Guided Discovery Learning* berbasis *APOS* secara keseluruhan dan berdasarkan level KAM pada indikator 'memeriksa kebenaran argumen atau proses solusi matematika' mengalami kesulitan yang lebih rendah dalam menyelesaikan soal KBRM daripada mahasiswa yang memperoleh *Direct Learning*. Untuk memperdalam hasil analisis deskriptif tersebut, maka analisis dilanjutkan pada analisis dokumen (jawaban tes KBRM mahasiswa berdasarkan level KAM), hasil observasi, dan wawancara (triangulasi). Adapun soal KBRM yang mengungkap indikator 'memeriksa kebenaran argumen atau proses solusi matematika' pada Mata kuliah Pengantar Teori Peluang adalah sebagai berikut:

Periksalah kebenaran dari proses penyelesaian dari soal di bawah ini kemudian perbaikilah jika terdapat kesalahan agar diperoleh proses penyelesaian yang benar!

Soal:

Diketahui fungsi densitas dari peubah acak X berbentuk:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1; & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}(1-2x)^2; & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0; & x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Tentukanlah fungsi distribusi dari fungsi densitas tersebut.

Penyelesaian:

Untuk $x < 0$: $F(x) = 0$

Untuk $0 \leq x < \frac{1}{2}$: $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt$

$$= \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x (2t+1) dt$$

$$= [t^2 + t]_0^x = x^2 + x$$

Untuk $\frac{1}{2} \leq x < 1$: $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt + \int_{\frac{1}{2}}^x f(t) dt$

$$= \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^{\frac{1}{2}} (2t+1) dt + \int_{\frac{1}{2}}^x \frac{3}{2}(1-2t)^2 dt$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} (2t+1) dt + \int_{\frac{1}{2}}^x \frac{3}{2}(1-2t+4t^2) dt$$

$$= [t^2 + t]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{3}{2}(t - 2t^2 + \frac{4}{3}t^3) \right]_{\frac{1}{2}}^x = 2x^3 - 3x^2 + \frac{3}{2}x$$

Untuk $x \geq 1$: $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t) dt + \int_1^x f(t) dt$

$$= \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^{\frac{1}{2}} (2t+1) dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{3}{2}(1-2t)^2 dt + \int_1^x 0 dt$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} (2x+1) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{3}{2}(1-2x+4x^2) dx$$

$$= [x^2 + x]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{3}{2}(x - 2x^2 + \frac{4}{3}x^3) \right]_{\frac{1}{2}}^1 = 1$$

Jadi, fungsi distribusi dari fungsi densitas tersebut adalah

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x < 0 \\ x^2 + x; & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2x^3 - 3x^2 + \frac{3}{2}x; & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 1; & x \geq 1 \end{cases}$$

Soal di atas bertujuan untuk mengungkap kemampuan mahasiswa dalam memeriksa kebenaran argumen atau proses solusi matematika terkait peubah acak kontinu. Berikut ini adalah hasil analisis dokumen (jawaban tes KBRM mahasiswa berdasarkan level KAM), observasi, dan wawancara terkait indikator ‘memeriksa kebenaran argumen atau proses solusi matematika’.

1. Untuk mahasiswa dengan KAM tinggi, baik yang memperoleh *Guided Discovery Learning* berbasis *APOS* maupun *Direct Learning*, umumnya mereka tidak mengalami kesulitan yang berarti dalam memeriksa kebenaran dari proses penyelesaian beserta perbaikannya. Namun, ada beberapa mahasiswa dari kelompok pembelajaran ‘*Direct Learning*’ ternyata kurang rinci dalam memperbaiki proses penyelesaian yang keliru.
2. Untuk mahasiswa dengan KAM sedang, baik yang memperoleh *Guided Discovery Learning* berbasis *APOS* maupun *Direct Learning*, mereka sebenarnya tidak mengalami kesulitan dalam memeriksa kebenaran dari proses penyelesaian beserta perbaikannya. Namun, faktor ketidaktelitianlah yang membuat perbaikannya masih keliru. Selain itu, ada beberapa mahasiswa dari kelompok pembelajaran ‘*Direct Learning*’ yang lupa memperbaiki kesalahan dari proses penyelesaian soal tersebut.
3. Untuk mahasiswa dengan KAM rendah, baik yang memperoleh *Guided Discovery Learning* berbasis *APOS* maupun *Direct Learning*, beberapa di antaranya masih mengalami kesulitan dalam memeriksa kebenaran dari proses penyelesaian beserta perbaikannya. Selain faktor ketidaktelitian yang membuat perbaikannya masih keliru, kesulitan yang dialami juga dipengaruhi oleh masih lemahnya penguasaan konsep dari beberapa mahasiswa terutama dari kelompok pembelajaran ‘*Direct Learning*’ dalam menentukan fungsi distribusi dari fungsi densitas peubah acak kontinu X .

Indikator ‘Mengidentifikasi data relevan dan tidak relevan dalam menyelesaikan masalah matematika’ pada KBRM

Tabel 4 menunjukkan bahwa rerata pencapaian mahasiswa secara keseluruhan dan berdasarkan level KAM yang memperoleh *Guided Discovery Learning* berbasis *APOS* untuk

indikator ‘mengidentifikasi data relevan dan tidak relevan dalam menyelesaikan masalah matematika’ pada KBRM ternyata lebih tinggi daripada mahasiswa yang memperoleh *Direct Learning*. Artinya, mahasiswa yang memperoleh *Guided Discovery Learning* berbasis APOS secara keseluruhan dan berdasarkan level KAM pada indikator ‘mengidentifikasi data relevan dan tidak relevan dalam menyelesaikan masalah matematika’ mengalami kesulitan yang lebih rendah dalam menyelesaikan soal KBRM daripada mahasiswa yang memperoleh *Direct Learning*. Untuk mempertegas hasil analisis deskriptif tersebut, maka analisis dilanjutkan pada analisis dokumen (jawaban tes KBRM mahasiswa berdasarkan level KAM), hasil observasi, dan wawancara (triangulasi). Adapun soal KBRM yang mengungkap indikator ‘mengidentifikasi data relevan dan tidak relevan dalam menyelesaikan masalah matematika’ pada Mata kuliah Pengantar Teori Peluang adalah sebagai berikut:

Diberikan fungsi peluang sebagai berikut:

$$p(x) = 3\left(\frac{1}{4}\right)^x, x = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Fungsi peluang di atas memiliki data ukuran sebagai berikut:

- $\sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^x = 0,33$
- $\sum_{x=0}^{\infty} 3\left(\frac{1}{4}\right)^x = 1$
- $\sum_{x=0}^{\infty} x\left(\frac{1}{4}\right)^x = 0,44$
- $\sum_{x=0}^{\infty} x^2\left(\frac{1}{4}\right)^x = 0,741$
- $[E(X)]^2 = 1,7424$
- $[E(X^2)]^2 = 4,93$

Berdasarkan data ukuran di atas, data mana yang akan digunakan dan data mana pula yang tidak digunakan untuk mencari $Var(X)$ dari fungsi peluang tersebut! Uraikanlah jawaban Anda!

Soal di atas bertujuan untuk mengungkap kemampuan mahasiswa dalam mengidentifikasi data relevan dan tidak relevan dalam menyelesaikan masalah matematika terkait peubah acak diskret. Berikut ini adalah hasil analisis dokumen (jawaban tes KBRM mahasiswa berdasarkan level KAM), observasi, dan wawancara terkait indikator ‘mengidentifikasi data relevan dan tidak relevan dalam menyelesaikan masalah matematika’.

1. Untuk mahasiswa dengan KAM tinggi, baik yang memperoleh *Guided Discovery Learning* berbasis APOS maupun *Direct Learning*, umumnya mereka tidak mengalami kesulitan yang berarti dalam memilah data terkait data mana yang akan digunakan dan data mana yang tidak digunakan dalam mencari $Var(X)$. Namun, ada beberapa mahasiswa dari kelompok pembelajaran ‘*Direct Learning*’ yang terkecoh dengan salah satu data sehingga jawabannya menjadi keliru.
2. Untuk mahasiswa dengan KAM sedang, baik yang memperoleh *Guided Discovery Learning* berbasis APOS maupun *Direct Learning*, mereka sebenarnya dapat memilah data terkait data mana yang akan digunakan dan data mana yang tidak digunakan dalam mencari $Var(X)$ dengan baik. Namun, faktor ketidaktelitianlah yang membuat jawabannya menjadi keliru. Mahasiswa dari kelompok pembelajaran ‘*Direct Learning*’ ternyata banyak yang terkecoh dengan salah satu data yang seharusnya data tersebut dapat digunakan dalam mencari $Var(X)$ tetapi malah dianggap sebaliknya karena kurang teliti.
3. Untuk mahasiswa dengan KAM rendah, baik yang memperoleh *Guided Discovery Learning* berbasis APOS maupun *Direct Learning*, beberapa di antaranya masih mengalami kesulitan dalam memilah data terkait data mana yang akan digunakan dan data mana yang tidak

digunakan dalam mencari $Var(X)$. Selain faktor ketidaktelitian yang membuat jawabannya menjadi keliru, kesulitan yang dialami juga dipengaruhi oleh masih lemahnya penguasaan konsep beberapa mahasiswa terutama kelompok pembelajaran ‘*Direct Learning*’ terkait $Var(X)$ dari peubah acak diskret dengan batas tak hingga.

Indikator ‘Menganalogi dari beberapa masalah matematika yang serupa disertai alasan’ pada KBRM

Berdasarkan Tabel 4, diperoleh informasi bahwa rerata pencapaian mahasiswa secara keseluruhan dan berdasarkan level KAM yang memperoleh *Guided Discovery Learning* berbasis APOS untuk indikator ‘menganalogi dari beberapa masalah matematika yang serupa disertai alasan’ pada KBRM ternyata lebih tinggi daripada mahasiswa yang memperoleh *Direct Learning*. Hal ini bermakna bahwa mahasiswa yang memperoleh *Guided Discovery Learning* berbasis APOS secara keseluruhan dan berdasarkan level KAM pada indikator ‘menganalogi dari beberapa masalah matematika yang serupa disertai alasan’ mengalami kesulitan yang lebih rendah dalam menyelesaikan soal KBRM daripada mahasiswa yang memperoleh *Direct Learning*. Untuk memperkuat hasil analisis deskriptif tersebut, maka analisis dilanjutkan pada analisis dokumen (jawaban tes KBRM mahasiswa berdasarkan level KAM), hasil observasi, dan wawancara (triangulasi). Adapun soal KBRM yang mengungkap indikator ‘menganalogi dari beberapa masalah matematika yang serupa disertai alasan’ pada Mata kuliah Pengantar Teori Peluang adalah sebagai berikut:

Perhatikanlah kedua kasus berikut ini!

Kasus 1:

Diketahui:

$$p(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{1-x}, \quad x = 0, 1 \Rightarrow \sum_{x=0}^1 xp(x) = 0\left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^1 + 1\left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{3}.$$

Kasus 2:

Diberikan fungsi peluang sebagai berikut:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & x = 0 \\ \frac{3}{8}, & x = 1 \\ \frac{3}{8}, & x = 2 \\ \frac{1}{8}, & x = 3 \end{cases}$$

maka: $\sum_{x=0}^3 e^{tx} p(x) = \left(\frac{1}{8}\right) + e^t \left(\frac{3}{8}\right) + e^{2t} \left(\frac{3}{8}\right) + e^{3t} \left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8}e^t + \frac{3}{8}e^{2t} + \frac{1}{8}e^{3t}$
dimisalkan ini adalah fungsi $u(t)$

sehingga $u'(t) = \frac{3}{8}e^t + \frac{6}{8}e^{2t} + \frac{3}{8}e^{3t} \Rightarrow u'(0) = \frac{3}{8} + \frac{6}{8} + \frac{3}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}.$

Berdasarkan ke-2 kasus di atas, analogi (hubungan konsep) apa yang digunakan?

Uraikan jawaban Anda disertai alasan!

Soal di atas bertujuan untuk mengungkap kemampuan mahasiswa dalam menganalogi beberapa masalah matematika yang serupa disertai alasan terkait peubah acak diskret. Berikut ini adalah hasil analisis dokumen (jawaban tes KBRM mahasiswa berdasarkan level KAM), observasi, dan wawancara terkait indikator ‘menganalogi dari beberapa masalah matematika yang serupa disertai alasan’.

1. Untuk mahasiswa dengan KAM tinggi dan sedang, baik yang memperoleh *Guided Discovery Learning* berbasis APOS maupun *Direct Learning*, mereka mengalami kesulitan dalam memberikan alasan terkait analogi yang digunakan. Hal ini terlihat dari jawaban mahasiswa yang dapat menyebutkan analogi dengan benar meskipun penulisan konsep dan alasannya kurang lengkap.

2. Untuk mahasiswa dengan KAM rendah, baik yang memperoleh *Guided Discovery Learning* berbasis *APOS* maupun *Direct Learning*, mereka mengalami kesulitan dalam menyebutkan analogi beserta alasannya. Hal ini terlihat dari jawaban mahasiswa yang kurang relevan. Bahkan, ada beberapa mahasiswa dari kelompok pembelajaran '*Direct Learning*' yang tidak menuliskan alasan terkait analogi yang digunakan.

Indikator 'Menyusun bentuk umum terkait proses matematika disertai alasan' pada KBRM

Untuk indikator 'menyusun bentuk umum terkait proses matematika disertai alasan' pada KBRM, rerata pencapaian mahasiswa secara keseluruhan dan berdasarkan level KAM yang memperoleh *Guided Discovery Learning* berbasis *APOS* menurut Tabel 4 ternyata lebih tinggi daripada mahasiswa yang memperoleh *Direct Learning*. Hal ini memberikan informasi bahwa mahasiswa yang memperoleh *Guided Discovery Learning* berbasis *APOS* secara keseluruhan dan berdasarkan level KAM pada indikator 'menyusun bentuk umum terkait proses matematika disertai alasan' mengalami kesulitan yang lebih rendah dalam menyelesaikan soal KBRM daripada mahasiswa yang memperoleh *Direct Learning*. Untuk memperdalam hasil analisis deskriptif tersebut, maka analisis dilanjutkan pada analisis dokumen (jawaban tes KBRM mahasiswa berdasarkan level KAM), hasil observasi, dan wawancara (triangulasi). Adapun soal KBRM yang mengungkap indikator 'menyusun bentuk umum terkait proses matematika disertai alasan' pada Mata kuliah Pengantar Teori Peluang adalah sebagai berikut:

Diberikan fungsi densitas sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{81}x^3, & 0 < x < 3 \\ 0, & x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Fungsi densitas di atas memiliki data ukuran sebagai berikut:

- $E(X) = 2,4$
- $E(X^2) = 8$
- $E(X^3) = 15,4$

Berdasarkan data ukuran di atas, carilah $E(X^n)$. Uraikan jawaban Anda disertai alasan!

Soal di atas bertujuan untuk mengungkap kemampuan mahasiswa dalam menyusun bentuk umum terkait proses matematika disertai alasan' terkait peubah acak kontinu. Berikut ini adalah hasil analisis dokumen (jawaban tes KBRM mahasiswa berdasarkan level KAM), observasi, dan wawancara terkait indikator 'menyusun bentuk umum terkait proses matematika disertai alasan'.

1. Untuk mahasiswa dengan KAM tinggi, baik yang memperoleh *Guided Discovery Learning* berbasis *APOS* maupun *Direct Learning*, mereka mengalami kesulitan dalam mencari $E(X^n)$. Meskipun demikian, mereka berusaha mencoba membuat keterkaitan antara $E(X)$, $E(X^2)$, dan $E(X^3)$ dengan cara menjabarkannya agar diperoleh bentuk/pola umum walaupun hasilnya masih keliru.
2. Untuk mahasiswa dengan KAM sedang dan rendah, baik yang memperoleh *Guided Discovery Learning* berbasis *APOS* maupun *Direct Learning*, mereka kesulitan dalam membuat keterkaitan antara $E(X)$, $E(X^2)$, dan $E(X^3)$ agar diperoleh $E(X^n)$. Bahkan, ada beberapa mahasiswa dari kelompok pembelajaran '*Direct Learning*' yang tidak selesai dalam menjawab soal tersebut.

Berdasarkan hasil analisis di atas secara triangulasi (dokumentasi, observasi, dan wawancara), diperoleh temuan bahwa mahasiswa masih mengalami kesulitan, baik secara keseluruhan maupun berdasarkan level KAM, dalam menyelesaikan soal terkait KBRM pada kedua pembelajaran (*Guided Discovery Learning* berbasis *APOS* dan *Direct Learning*). Namun, mahasiswa yang telah memperoleh *Guided Discovery Learning* berbasis *APOS* mengalami kesulitan yang lebih rendah daripada mahasiswa yang telah memperoleh *Direct Learning*, baik secara keseluruhan maupun berdasarkan

level KAM. Hal ini dikarenakan, *Guided Discovery Learning* dan teori *APOS* ternyata lebih memberikan kontribusi terhadap pencapaian kemampuan matematis mahasiswa daripada *Direct Learning* (Isnarto, *et al.*, 2014 dan Herlina, 2015).

Pada dasarnya, kunci dari keberhasilan *Guided Discovery Learning* berbasis *APOS* yang dapat mengembangkan KBRM mahasiswa pada tiap level KAM sehingga dapat mengatasi kesulitan dalam menyelesaikan soal berpikir reflektif matematis terletak pada peran LKM. Penggunaan LKM yang berbasis *APOS* memiliki peran penting dalam mengembangkan KBRM. Seperti yang diungkapkan oleh Isnarto, *et al.* (2014) bahwa penggunaan LKM dalam pembelajaran memiliki peran besar dalam memperkuat modal mahasiswa dalam mengembangkan kemampuan matematisnya. LKM yang didesain untuk mengembangkan KBRM dapat membantu mahasiswa dalam menguasai konsep Pengantar Teori Peluang. Hal ini dikarenakan, isi LKM disusun secara berjenjang mulai dari kasus sederhana, pengkonstruksian definisi, penerapan konsep yang telah dikonstruksi dalam bentuk kasus yang lebih kompleks, serta pemberian latihan untuk memperkuat konsep. Temuan ini serupa dengan temuan Isnarto, *et al.* (2014) dan Herlina (2015) bahwa mahasiswa yang memperoleh *Guided Discovery Learning* dan teori *APOS* dapat mengembangkan kemampuan matematisnya menjadi lebih baik berdasarkan level KAM.

Selain temuan di atas, diperoleh juga temuan lain yaitu kesulitan paling banyak yang dialami mahasiswa tiap level KAM pada kedua pembelajaran (*Guided Discovery Learning* berbasis *APOS* dan *Direct Learning*) dalam menyelesaikan soal berpikir reflektif matematis pada Mata kuliah Pengantar Teori Peluang terletak pada indikator ‘menganalogi dari beberapa masalah matematika yang serupa disertai alasan’ dan ‘menyusun bentuk umum terkait proses matematika disertai alasan’. Temuan ini dapat dilihat dari hasil analisis deskriptif, baik berdasarkan Tabel 4 maupun hasil analisis per indikator KBRM tiap level KAM. Temuan ini serupa dengan temuan Sumarmo (2013) bahwa mahasiswa mengalami kesulitan dalam mengerjakan soal analogi dan menyusun bentuk umum.

Berdasarkan paparan di atas, terlihat bahwa *Guided Discovery Learning* berbasis *APOS* sebagai salah satu alternatif pembelajaran inovatif ternyata mampu mengatasi kesulitan mahasiswa dalam menyelesaikan soal berpikir reflektif matematis walaupun belum optimal. Meskipun demikian, pembelajaran tersebut mampu membantu mahasiswa dalam menguasai konsep Pengantar Teori Peluang.

PENUTUP

Mahasiswa masih mengalami kesulitan, baik secara keseluruhan maupun berdasarkan level KAM, dalam menyelesaikan soal berpikir reflektif matematis pada kedua pembelajaran (*Guided Discovery Learning* berbasis *APOS* dan *Direct Learning*). Namun, mahasiswa yang telah memperoleh *Guided Discovery Learning* berbasis *APOS* mengalami kesulitan yang lebih rendah daripada mahasiswa yang telah memperoleh *Direct Learning*, baik secara keseluruhan maupun berdasarkan level KAM. Adapun kesulitan paling banyak yang dialami mahasiswa tiap level KAM pada kedua pembelajaran terletak pada indikator ‘menganalogi dari beberapa masalah matematika yang serupa disertai alasan’ dan ‘menyusun bentuk umum terkait proses matematika disertai alasan’. Untuk mengatasi hal tersebut, dosen disarankan untuk mengimplementasikan *Guided Discovery Learning* berbasis *APOS* secara intensif agar dapat mengatasi kesulitan mahasiswa dalam menyelesaikan soal berpikir reflektif matematis secara optimal.

DAFTAR PUSTAKA

- Herlina, E. (2015). Advanced mathematical thinking and the way to enhance it. *Journal of Education and Practice*, 6 (5): 79-88.
- Isnarto, *et al.* (2014). Student’s proof ability: Exploratory studies of abstract algebra course. *International Journal of Education dan Research*, 2 (6): 215-228.
- Lestari, R.B., dkk. (2019). Penerapan pendekatan metakognitif untuk meningkatkan kemampuan berpikir reflektif matematis siswa SMA ditinjau dari tahap perkembangan kognitif. *Prima*, 3 (2): 134-145.

- Nindiasari, H., dkk. (2014). Pendekatan metakognitif untuk meningkatkan kemampuan berpikir reflektif matematis siswa SMA. *Edusentris*, 1 (1): 80-90.
- Nuriana, K., dkk. (2018). Kemampuan berpikir reflektif matematis siswa kelas VII ditinjau dari gaya kognitif pada model pembelajaran PBL. *Prisma: Prosiding Seminar Nasional Matematika* (p. 177-188).
- Sugiyono. (2011). *Metode penelitian kombinasi (mixed methods)*. Bandung: Alfabeta.
- Sumarmo, U. (2013). Pembelajaran matematika. In Suryadi, D., Turmudi, and Nurlaelah, E. (Editor). *Kumpulan makalah: Berpikir dan disposisi matematik serta pembelajarannya*, Vol 1, 122-146. Bandung: FPMIPA-UPI Press.
- Suryadi, D. (2012). *Membangun budaya baru dalam berpikir matematika*. Bandung: Rizqi Press.
- Suryana, A. (2016). *Meningkatkan advanced mathematical thinking dan self-renewal capacity mahasiswa melalui pembelajaran model PACE*. Published Dissertation. Bandung: UPI.
- (2019). Analisis kesulitan mahasiswa dalam menyelesaikan soal advanced mathematical thinking pada mata kuliah pengantar teori peluang. *SIMPONI: Prosiding Simposium Nasional Ilmiah* (p. 178-186). DOI: 10.30998/simponi.v0i0.491