SINASIS 1 (1) (2020)

Prosiding Seminar Nasional Sains

S-Semigrup Matriks Kelas Interval

Dyana Patty*, Henry Willyam Michel Patty
Program Studi Matematika Jurusan Matematika, FMIPA Universitas Pattimura
E-mail: pattydyana@gmail.com*

Info Artikel

Kata kunci:
Kelas interval natural, matriks interval, semigrup Smarandache

Abstrak

Perlu dijelaskan bahwa kelas dalam tulisan ini bukanlah kelas yang terbentuk karena relasi ekuivalensi dan kata natural tidak merujuk pada himpunan bilangan asli. Kelas interval natural bilangan bulat yang dinotasikan dengan $N(\mathbb{Z})$ adalah suatu himpunan yang terdiri dari koleksi interval naik, interval turun dan interval merosot. Dalam tulisan ini akan dibangun matriks yang unsur-unsurnya merupakan elemen $N(\mathbb{Z})$. Selanjutnya dari matriks interval dapat didefinisikan semigrup matriks interval dan semigrup Smarandache interval yang dinotasikan dengan *S*-semigrup. Lebih lanjut akan dikaji sifat-sifat *S*-semigrup.

How to Cite: Patty, D, & Patty, H.W.M. (2020). S-Semigrup Matriks Kelas Interval. *Prosiding Seminar Nasional Sains 2020*, 1 (1): 339-344.

PENDAHULUAN

Dalam struktur aljabar abstrak, telah diketahui bahwa himpunan semua bilangan bulat $\mathbb{Z}$ merupakan ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian. Jika suatu struktur aljabar umumnya dibangun dari himpunan bilangan-bilangan, maka pada tahun 2010 Kandasamy, Smarandache dan Chetry membangun suatu grupoid dari himpunan interval. Diberikan $[x, y]$ adalah interval tutup $N_c(\mathbb{Z})$ (himpunan $\mathbb{Z}$ dapat diganti dengan $\mathbb{Q}$ atau $\mathbb{R}$ atau $\mathbb{Z}_n$ dengan $1 \leq n \leq \infty$). Interval tutup $[x, y]$ disebut interval naik jika $x < y$, interval tutup $[x, y]$ disebut interval turun jika $x > y$ dan interval tutup $[x, y]$ disebut interval merosot jika $x = y$. Hal yang sama juga berlaku untuk interval buka $N_o(\mathbb{Z})$, interval buka tutup $N_{oc}(\mathbb{Z})$ dan interval tutup buka $N_{co}(\mathbb{Z})$. Selanjutnya dengan menggunakan himpunan interval tersebut, pada tahun 2011 Kandasamy dan Smarandache melanjutkan dengan membangun semigrup interval dan semiring interval. Di tahun yang sama, Kandasamy dan Smarandache kemudian mendefinisikan kelas interval natural yaitu himpunan yang anggota-anggotanya merupakan koleksi interval naik, interval turun dan interval merosot. Dari kelas interval natural ini kemudian dibangun semigrup matriks kelas interval natural. Dalam keseluruhan tulisan ini, matriks kelas interval natural hanya disebut matriks interval.

Secara umum dua matriks dapat dikalikan jika banyaknya kolom matriks pertama sama dengan banyaknya baris matriks kedua. Selain itu diperoleh bahwa operasi perkalian dua matriks tidak bersifat komutatif, yaitu $AB \neq BA$. Hal ini berbeda dengan operasi perkalian pada matriks interval. Dua matriks interval dapat dikalikan jika kedua matriks tersebut memiliki ukuran yang sama dan berlaku sifat komutatif pada operasi perkalian matriks interval tersebut. Dalam tulisan ini akan didefinisikan $(\mathcal{S},\times)$ sebagai semigrup komutatif matriks interval. Lebih lanjut jika dapat ditemukan suatu subset P dari $(\mathcal{S},\times)$, dimana P merupakan grup terhadap operasi yang sama dengan $(\mathcal{S},\times)$ maka $(\mathcal{S},\times)$ tersebut dinamakan semigrup Smarandache.

METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur. Langkah pertama yang dilakukan adalah mengkaji definisi dan contoh kelas interval natural selanjutnya mendefinisikan matriks interval dan operasi pada matriks interval. Untuk sifat-sifat matriks interval dibuktikan dengan menggunakan bukti langsung (memanfaatkan sifat-sifat matriks).

MATRIKS INTERVAL

Berikut ini akan dibahas tentang matriks interval yaitu matriks yang unsur-unsurnya merupakan elemen kelas interval natural. Selanjutnya pada keseluruhan penelitian ini**,** kelas interval tutup natural $N_c(\mathbb{Z})$ dapat diganti dengan kelas $N_o(\mathbb{Z})$ atau $N_{oc}(\mathbb{Z})$ atau $N_{co}(\mathbb{Z})$ dan himpunan $\mathbb{Z}$ dapat diganti dengan $\mathbb{Q}$ atau $\mathbb{R}$ atau $\mathbb{Z}_n$ dengan $n < \infty$.

Pertama-tama akan diberikan definisi vektor baris dan vektor kolom interval sebagai berikut.

Definisi 3.1

Himpunan

$$A = \{([a_1, b_1]_{11} \quad [a_2, b_2]_{12} \quad \dots \quad [a_n, b_n]_{1n}) | a_i \in N_c(\mathbb{Z}), 1 \le i \le n\}$$

disebut himpunan vektor baris interval tutup berukuran $1 \times n$.

Vektor baris selanjutnya hanya ditulis

$$([a_1, b_1], [a_2, b_2], \cdots, [a_n, b_n])$$

Contoh 3.2

Diberikan

$$B = \big((-2,2], (18,10], (-9,-9]\big)$$

adalah vektor baris interval buka tutup berukuran 1×3.

Definisi 3.3

Himpunan

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} [a_1, b_1]_{11} \\ [a_2, b_2]_{21} \\ \vdots \\ [a_m, b_m]_{m1} \end{pmatrix} | [a_i, b_i] \in N_c(\mathbb{Z}), 1 \le i \le m \right\}$$

disebut himpunan vektor kolom interval tutup berukuran $m \times 1$.

Vektor kolom selanjutnya hanya ditulis

$$\begin{pmatrix} [a_1, b_1] \\ [a_2, b_2] \\ \vdots \\ [a_n, b_n] \end{pmatrix}$$

Contoh 3.4

Diberikan

$$D = \begin{pmatrix} [2,10) \\ [7,-2) \\ [-9,3) \\ [8,8) \\ [-1,-4) \\ [10,0) \\ [1,3) \end{pmatrix}$$

adalah vektor kolom interval tutup buka berukuran 7×1.

Setelah dibahas tentang vektor baris dan vektor kolom interval, selanjutnya akan dijelaskan definisi matriks interval.

Definisi 3.5
Misalkan diberikan

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} [a_1, b_1]_{11} & \dots & [a_n, b_n]_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ [a_m, b_m]_{m1} & \dots & [a_m, b_m]_{mn} \end{pmatrix} \middle| [a, b] \in N_c(\mathbb{Z}), 1 \le i \le m, 1 \le j \le n \right\}.$$

Himpunan M disebut himpunan matriks interval tutup berukuran $m \times n$.

Contoh 3.6
Matriks

$$M = \begin{pmatrix} [2, -5] & [0,4] & [-7, -3] \\ [-8,4] & [-2, -3] & [5,8] \\ [3,3] & [-1,6] & [4,3] \end{pmatrix}$$

adalah matriks interval tutup berukuran 3×3.

OPERASI PADA MATRIKS INTERVAL

Pada bagian ini akan didefinisikan operasi penjumlahan dan perkalian pada matriks interval.

Definisi 4.1
Misalkan diberikan matriks-matriks interval tutup $A = \begin{pmatrix} [a_1, b_1]_{11} & \dots & [a_n, b_n]_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ [a_m, b_m]_{m1} & \dots & [a_m, b_m]_{mn} \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} [x_1, y_1]_{11} & \dots & [x_1, y_n]_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ [x_m, y_m]_{m1} & \dots & [x_m, y_m]_{mn} \end{pmatrix}$ yang masing-masing berukuran $m \times n$. Jumlah matriks A dan matriks B adalah

$$A + B = \begin{pmatrix} [a_1 + x_1, b_1 + y_1]_{11} & \dots & [a_n + x_n, b_n + y_n]_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ [a_m + x_m, b_m + y_m]_{m1} & \dots & [a_m + x_m, b_m + y_m]_{mn} \end{pmatrix}$$

Untuk lebih jelasnya akan diberikan contoh berikut.

Contoh 4.2
Diberikan matriks-matriks interval tutup A dan B masing-masing berukuran 2×1

$$A = \begin{pmatrix} [-3,4] \\ [10, -5] \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} [-4,6] \\ [-3,0] \end{pmatrix}$$

Hasil jumlahan A dan B adalah

$$A + B = \begin{pmatrix} [-3 + (-4), 4 + 6] \\ [10 + (-3), -5 + 0] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-7,10] \\ [7, -5] \end{pmatrix}$$

Selanjutnya akan didefiniskan operasi perkalian dua matriks interval tutup. Jika secara umum pada teori matriks disyaratkan perkalian matriks A dan matriks B dapat berjalan apabila jumlah kolom matriks A sama dengan jumlah baris matriks B, maka pada perkalian dua matriks interval ukuran matriksnya harus sama.

Definisi 4.3
Misalkan diberikan matriks-matriks interval tutup $A = \begin{pmatrix} [a_1, b_1]_{11} & \dots & [a_n, b_n]_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ [a_m, b_m]_{m1} & \dots & [a_m, b_m]_{mn} \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} [x_1, y_1]_{11} & \dots & [x_1, y_n]_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ [x_m, y_m]_{m1} & \dots & [x_m, y_m]_{mn} \end{pmatrix}$ yang masing-masing berukuran $m \times n$. Hasil perkalian matriks A dan matriks B adalah

$$A \times B = \begin{pmatrix} [a_1 \times x_1, b_1 \times y_1]_{11} & \dots & [a_n \times x_n, b_n \times y_n]_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ [a_m \times x_m, b_m \times y_m]_{m1} & \dots & [a_m \times x_m, b_m \times y_m]_{mn} \end{pmatrix}$$

Untuk lebih jelasnya akan diberikan contoh berikut.

Contoh 4.4

Diberikan matriks-matriks interval tutup buka A dan B masing-masing berukuran 2×2

$$A = \begin{pmatrix} [4,-3) & [5,5) \\ [-3,0) & [0,-4) \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} [2,-2) & [-1,6) \\ [1,3) & [3,3) \end{pmatrix}$$

Hasil perkalian A dan B adalah

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{pmatrix} [4,-3) \times [2,-2) & [5,5) \times [-1,6) \\ [-3,0) \times [1,3) & [0,-4) \times 3,3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} [4 \times 2, -3 \times -2) & [5 \times -1, 5 \times 6) \\ [-3 \times 1, 0 \times 3) & [0 \times 3, -4 \times 3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} [8,6) & [-5,30) \\ [-3,0) & [0,-12) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

SEMIGRUP MATRIKS INTERVAL

Setelah mendefinisikan operasi penjumlahan dan perkalian, selanjutnya akan dibentuk semigrup matriks interval.

Definisi 5.1

Misalkan diberikan

$$\mathcal{S} = \{[[x_1, y_1], \cdots, [x_n, y_n]] | [x_i, y_i] \in N_c(\mathbb{Z}), 1 \le i \le n\}$$

adalah himpunan vektor baris interval tutup dan didefinisikan operasi perkalian matriks " $\times$ " pada S. Jika himpunan S terhadap operasi "$\times$" memenuhi sifat tertutup yaitu untuk setiap matriks A dan B di $\mathcal{S}$ berlaku

$$A \times B \in \mathcal{S}$$

maka himpunan $\mathcal{S}$ disebut semigrup matriks interval tutup terhadap operasi " $\times$ " dan dinotasikan dengan $(\mathcal{S}, \times)$.

Lebih lanjut diperoleh bahwa untuk setiap matriks A dan B di $\mathcal{S}$ berlaku

$$A \times B = B \times A$$

Dengan kata lain, $(\mathcal{S}, \times)$ merupakan semigrup komutatif.

Contoh 5.2

Diberikan

$$\mathcal{S} = \{([x_1, y_1), \cdots, [x_n, y_n)) | [x_i, y_i) \in N_{co}(\mathbb{Q}), 1 \le i \le 3\}$$

Jika diambil $A = [[2,-3), [4,4), [0,7)]$ dan $B = ([-3,-3), [-6,1), [0,-5))$ dimana $A, B \in \mathcal{S}$ maka

$$\begin{aligned} A \times B &= ([2,-3) \times [-3,-3), [4,4) \times [-6,1), [0,7) \times [0,-5)) \\ &= ([-6,9), [-24,4), [0,-35)) \end{aligned}$$

Diperoleh $A \times B \in \mathcal{S}$. Jadi, $(\mathcal{S}, \times)$ adalah semigrup matriks interval tutup buka.

Berikut ini akan didefinisikan semigrup Smarandache

Definisi 5.3

Misalkan $(\mathcal{S}, \times)$ adalah semigrup matriks interval. Himpunan $\mathcal{S}$ disebut semigrup Smarandache jika terdapat $R \subset \mathcal{S}$ sedemikian sehingga R merupakan grup terhadap operasi yang sama pada $\mathcal{S}$. Semigrup Smaradache dinotasikan dengan S-semigrup.

Contoh 5.4

Diberikan

$M = \{([x_1, y_1], [x_2, y_2]) | [x_i, y_i] \in N_c(\mathbb{Z}_{18}), 1 \le i \le 2\}$ semigrup matriks kelas interval tutup natural. Misalkan diambil $P \subset M$, dengan

$$P = \left\{ \begin{array}{c} ([1,1],[1,1]),([1,1],[1,17]),([1,1],[17,1]), \\ ([1,1],[17,17]), \\ ([1,17],[1,17]),([1,17],[17,1]),([1,17],[1,1]), \\ ([1,17],[17,17]), \\ ([17,1],[17,1]),([17,1],[1,17]),([17,1],[1,1]), \\ ([17,1],[17,17]), \\ ([17,17],[17,17]),([17,17],[17,1]),([17,17],[1,17]), \\ ([17,1],[1,1]) \end{array} \right\}$$

Himpunan P terhadap operasi "$\times_{18}$" merupakan semigrup. Selain itu terdapat $([1,1],[1,1]) \in P$ yang merupakan elemen identitas. Berikut ini akan ditunjukkan invers setiap elemen pada P.

Tabel 1. Invers setiap elemen pada P

Elemen *P*	**Invers elemen *P***
$([1,1],[1,1])$	$([1,1],[1,1])$
$([1,1],[1,17])$	$([1,1],[1,17])$
$([1,1],[17,1])$	$([1,1],[17,1])$
$([1,1],[17,17])$	$([1,1],[17,17])$
$([1,17],[1,17])$	$([1,17],[1,17])$
$([1,17],[17,1])$	$([1,17],[17,1])$
$([1,17],[1,1])$	$([1,17],[1,1])$
$([1,17],[17,17])$	$([1,17],[17,17])$
$([17,1],[17,1])$	$([17,1],[17,1])$
$([17,1],[1,17])$	$([17,1],[1,17])$
$([17,1],[1,1])$	$([17,1],[1,1])$
$([17,1],[17,17])$	$([17,1],[17,17])$
$([17,17],[17,17])$	$([17,17],[17,17])$
$([17,17],[17,1])$	$([17,17],[17,1])$
$([17,17],[1,17])$	$([17,17],[1,17])$
$([17,1],[1,1])$	$([17,1],[1,1])$

Terlihat bahwa invers setiap elemen adalah dirinya sendiri. Karena $(P,\times_{18})$ merupakan semigrup, terdapat elemen identitas dan setiap elemen memiliki invers maka $(P,\times_{18})$ merupakan grup. Jadi M adalah S-semigrup.

Berikut ini akan diberikan sifat-sifat S-semigrup.

Teorema 5.5

Jika diberikan $G = \{([x_1,y_1],\cdots,[x_m,y_m]) | [x_i,y_i] \in N_c(\mathbb{Z}_n), n < \infty, 1 \le i \le m\}$ semigrup terhadap operasi "$\times_n$" maka G adalah S-semigrup.

Bukti

Untuk membuktikan bahwa G adalah S-semigrup maka harus ditemukan suatu subset sejati dari G yang merupakan grup terhadap operasi yang sama di G. Karena selalu dapat ditemukan $H \subset G$, dimana

$$H = \{([a_1,b_1],\cdots,[a_m,b_m]) | [a_i,b_i] \in N_c(1,n-1), 1 \le i \le m\}$$

merupakan semigrup terhadap operasi "$\times_n$", terdapat elemen identitas pada H yaitu $([1,1],\cdots,[1,1])$, dan invers setiap elemen di H adalah dirinya sendiri maka diperoleh $(H,\times_n)$ adalah grup. Jadi terbukti G adalah S-semigrup.

Selanjutnya jika kelas interval tutup pada Teorema 5.5 diganti dengan $N_c(\mathbb{Z})$, yaitu interval tutup bilangan bulat maka diperoleh sifat berikut.

Teorema 5.6

Jika diberikan $T = \{([x_1,y_1],\cdots,[x_n,y_n]) | [x_i,y_i] \in N_c(\mathbb{Z}), 1 \le i \le n\}$ semigrup terhadap operasi "$\times$" maka T adalah S-semigrup.

Bukti

Untuk membuktikan bahwa T adalah S-semigrup maka harus ditemukan suatu subset sejati dari T yang merupakan grup terhadap operasi yang sama di T. Karena selalu dapat ditemukan $U \subset G$, dimana

$$U = \{([a_1,b_1],\cdots,[a_m,b_m]) | [a_i,b_i] \in N_c(1,-1), 1 \le i \le m\}$$

merupakan semigrup terhadap operasi $" \times "$, terdapat elemen identitas pada U yaitu $([1,1], \cdots, [1,1])$, dan invers setiap elemen di U adalah dirinya sendiri maka diperoleh $(U, \times)$ adalah grup. Jadi terbukti T adalah S-semigrup.

Teorema berikut menjelaskan syarat semigrup matriks interval $(\mathcal{S}, \times)$ bukan *S*-semigrup.

Teorema 5.7

Jika diberikan $V = \{([x_1, y_1], \cdots, [x_n, y_n]) | [x_i, y_i] \in N_c(t\mathbb{Z}), 1 < t < \infty, 1 \leq i \leq n\}$ maka semigrup V bukan S-semigrup.

Bukti

Untuk membuktikan bahwa V bukan S-semigrup maka harus ditemukan suatu subset sejati dari V yang bukan merupakan grup terhadap operasi yang sama di V. Karena selalu dapat ditemukan $W \subset V$, dimana

$$W = \{([a_1, b_1], \cdots, [a_m, b_m]) | [a_i, b_i] \in N_c(1, \infty), 1 \leq i \leq m\}$$

merupakan semigrup terhadap operasi $" \times "$, tetapi tidak terdapat elemen identitas pada W yaitu $([1,1], \cdots, [1,1])$, maka diperoleh $(W, \times)$ bukan grup. Jadi terbukti V bukan S-semigrup.

KESIMPULAN

Adapun kesimpulan dari tulisan ini adalah sebagai berikut.

1. Dua matriks interval dapat dikalikan jika ukuran matriks-matriks tersebut sama.
2. Himpunan matriks interval merupakan semigrup komutatif terhadap operasi perkalian matriks interval.
3. Misalkan $(\mathcal{S}, \times)$ adalah semigrup matriks interval. Himpunan $\mathcal{S}$ disebut *S*-semigrup jika terdapat $R \subset \mathcal{S}$ sedemikian sehingga R merupakan grup terhadap operasi yang sama pada $\mathcal{S}$.
4. Semigrup matriks interval atas $\mathbb{Z}_n$ dengan $n < \infty$ merupakan *S*-semigrup.
5. Semigrup matriks interval atas $\mathbb{Z}$ atau $\mathbb{Q}$ atau $\mathbb{R}$ merupakan *S*-semigrup.
6. Semigrup matriks interval atas $t\mathbb{Z}$ dengan $1 < t < \infty$ bukan merupakan *S*-semigrup.
7. Penelitian ini masih dapat dilanjutkan untuk membangun *S*-ring matriks interval.

DAFTAR PUSTAKA

Kandasamy, W. B. V., Smarandache, F. (2011). *Algebraic Structures Using Natural Class of Intervals*. United States of Amerika : The Educational Publisher, Inc.

Malik, D. S., Mordeson, J. N., Sen, M. K (2007). *Introduction to Abstract Algebra*. United States of America : Scientific Word.

Wahyuni, S., Wijayanti, I. E., Susanti, Y. (2015). *Dasar-dasar Aljabar Linear*. Yogyakarta : Gadjah Mada University Press