SINASIS 2 (1) (2021)

**Prosiding Seminar Nasional Sains**

# Ruang Vektor Kuaternion Adalah Modul Kuaternion

Didik Nur Huda[1]
[1] Universitas Indraprasta PGRI
E-mail: didiks.physics@gmail.com

**Info Artikel**

Sejarah Artikel:
Diterima: 25 Mei 2021
Disetujui: 5 Juni 2021
Dipublikasikan: 30 Juni 2021

**Kata kunci:**
Ruang Vektor Kuaternionik, Modul Kuaternion Hilbert

**Abstrak**

Ruang vektor kuaternionik digunakan pada fondasi mekenika kuantum kuaternionik. Istilah Modul-$C^*$ Hilbert muncul dengan aksioma sama dengan ruang vektor kuaternionik. $C^*$ adalah sebuah gelanggang (*ring*), contohnya kuaternion. Kesamaan aksioma ruang vektor kuaternionik dan Modul-Kuaternion Hilbert

## PENDAHULUAN

Mekanika kuantum merupakan salah satu bagian dalam fisika yang saat ini cukup berkembang. Perkembangan mekanika kuantum dari sisi eksperimen dan teori. Terdapat beberapa eksperimen mekanika kuantum yang belum dapat dijawab dengan teori yang ada saat ini.

Teori mekanika kuantum dibangun dari statistik yang ada hubungan erat dengan peluang. Tidak hanya dengan peluang akan tetapi dinamikanya. Akan tetapi statistik saja belum dapat menjelaskan dengan baik. Menurut sejarah ada dua orang yang membangun teori mekanika kuantum yakni Schrodinger dan Heisenberg. Schrodinger dengan fungsi gelombangnya dan Heisenberg dengan mekanika matriks. Seorang matematikawan bernama David Hilbert dapat menyatukan konsep dari Schrodinger dan Heisenberg yang menjadi dasar utama sampai saat ini.

Dasar utama yang mapan dalam mekanika kuantum saat ini dibangun di atas ruang Hilbert. Ruang Hilbert adalah ruang vektor yang dibangun di atas bilangan kompleks dan memenuhi aksioma ruang vektor. Terdapat beberapa peneliti yang membangun teori mekanika kuantum di atas kuaternion dan menyebut ruang Hilbert kuaternionic (De Leo & Scolarici, 2000). Para peneliti ini berusaha membangun fondasi mekanika kuantum di atas kuaternion.

Dalam (Manuilov & Troitsky, 2005) terdapat istilah Modul-$C^*$Hilbert yang memiliki aksioma yang sama dengan ruang vektor kuaternionik. Dalam artikel ini bertujuan membandingkan kedua aksioma tersebut, jika sama maka ruang vektor kuaternionik dapat disebut dengan Modul-Kuaternion Hilbert.

## KUATERNION

Quaternion dikemukakan oleh William Rowan Hamilton tahun 1843. Quaternion dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$q = a + ib + jc + kd \tag{1}$$

dengan $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ dan $i, j, k$ merupakan elemen imajiner sehingga berlaku:

$$\begin{gathered} i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \\ ij = -ji = k \\ jk = -kj = i \\ ki = -ik = j \end{gathered}$$

Perkalian bagian imajiner hampir sama dengan perkalian vektor satuan $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$. Terdapat pula konjugatnya yang dapat disimbolkan $q_c$ (Girard, 2007) yang dinyatakan sebagai:

$$q_c = a - ib - jc - kd \tag{2}$$

Himpunan kuaternion disimbolkan dengan $\mathbb{H}$ singkatan dari Hamilton. Kuaternion merupakan aljabar asosiatif tetapi tidak komutatif, artinya memenuhi

$$\begin{gathered} p(qr) = (pq)r, \ \ \forall\, p, q, r \in \mathbb{H} \\ pq \neq qp, \qquad \forall\, p, q \in \mathbb{H} \end{gathered}$$

Jika $p, q \in \mathbb{H}$ dan $p = p_0 + ip_1 + jp_2 + kp_3$ serta $q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$ maka

$$\begin{aligned} pq = {} & (p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3) \\ & +(p_0q_1 + p_1q_0 + p_2q_3 - p_3q_2)i \\ & +(p_0q_2 + p_2q_0 + p_3q_1 - p_1q_3)j \\ & +(p_0q_3 + p_3q_0 + p_1q_2 - p_2q_1)k \end{aligned} \tag{3}$$

atau dapat juga dinyatakan

$$pq = (p_0q_0 - \vec{p} \cdot \vec{q}, p_0\vec{q} + q_0\,\vec{p} + \vec{p} \times \vec{q}) \tag{4}$$

dimana $\vec{p} \cdot \vec{q} = p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3$ dan $\vec{p} \times \vec{q} = (p_2q_3 - p_3q_2)i + (p_3q_1 - p_1q_3)j + (p_1q_2 - p_2q_1)k$. Ketika $q = q_0 + i0 + j0 + k0$ dengan $q_0 \in \mathbb{R}$ disebut skalar sedangkan ketika $q = 0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$ dengan $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$ dan elemen bukan nol maka $iq_1 + jq_2 + kq_3$ disebut bagian vektor.

Norm pada kuaternion

$$|q| = \sqrt{qq_c} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \tag{5}$$

dan memenuhi

$$(pq)_c = q_cp_c \tag{6}$$

$$|ab|^2 = |a|^2|b|^2 \tag{7}$$

Simbol konjugat di atas digunakan di (Girard, 2007), ada juga simbol konjugat $\bar{q}$ seperti di (De Leo & Scolarici, 2000).

## RUANG VEKTOR KUATERNIONIK

Dalam fundamental teori mekanika kuantum dibangun dalam ruang Hilbert. Maksudnya keadaan, operator, fungsi gelombang dan produk dalam (*inner product*) dinyatakan dan dilakukan di ruang Hilbert. Ruang Hilbert adalah ruang vektor di atas bilangan kompleks $\mathbb{C}$. Sedangkan mekanika kuantum kuaternion dibangun di atas kuaternion $\mathbb{H}$, sehingga ruang vektornya disebut ruang vektor kuaternionik (Adler, 1995). Ruang Hilbert kuaternionik $V_{\mathbb{H}}$ menurut (Adler, 1995) memenuhi aksioma berikut:

1. $V_{\mathbb{H}}$ sebuah ruang vektor dengan perkalian kanan dengan kuaternionik skalar, sehingga untuk sembarang vektor $f, g \in V_{\mathbb{H}}$ dan skalar kuaternionik $\phi, \phi_1, \phi_2 \in \mathbb{H}$ berlaku

$$\begin{gathered} f\phi_1 + g\phi_2 \in V\_\mathbb{H} \\ (f + g)\phi = f\phi + g\phi \\ f(\phi_1\phi_2) = (f\phi_1)\phi_2 \\ f(\phi_1 + \phi_2) = f\phi_1 + f\phi_2 \end{gathered} \tag{8}$$

2. Terdapat produk skalar atau *inner product* $\langle f, g\rangle$ dari $V_{\mathbb{H}} \times V_{\mathbb{H}}$ ke $\mathbb{H}$ yang menggunakan definisi norma nilai riil (*real-valued norm*) $|f|$ dengan syarat:

$$\langle f, g\rangle_c = \langle g, f\rangle \tag{9}$$

$$|f|^2 = \langle f, f\rangle > 0 \quad (10)$$
$$\langle f, g+h\rangle = \langle f, g\rangle + \langle f, h\rangle \quad (11)$$
$$\langle f, g\phi\rangle = \langle f, g\rangle\phi \quad (12)$$
$$\langle f\phi, g\rangle = \phi_c\langle f, g\rangle \quad (13)$$

3. Ruang $V_{\mathbb{H}}$ separabel artinya ada sembarang barisan rapat (*dense sequence*) $\{f_n\} \in V_{\mathbb{H}}$ mendekati sembarang $f \in V_{\mathbb{H}}$ dan lengkap yang artinya setiap barisan $\{f_n\} \in V_{\mathbb{H}}$ mempunyai limit $f \in V_{\mathbb{H}}$ di bawah definisi topologi oleh $|f|$.

Istilah ruang vektor kuaternion ini digunakan oleh beberapa peneliti dalam artikelnya (De Leo & Scolarici, 2000) , (Arbab, 2011).

## MODUL HILBERT

Dimulai dari istilah Modul Pra-Hilbert, menurut (Manuilov & Troitsky, 2005) definisi sebuah Modul -$A$ Pra-Hilbert sebagai berikut:

**Definisi 1.** Sebuah Modul-$A$ Pra-Hilbert adalah modul-$A$ (kanan) $\mathcal{M}$ dilengkapi dengan bentuk sesquilinear $\langle\cdot,\cdot\rangle: \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to A$ dengan memenuhi syarat:

(i) $\langle f, f\rangle \geq 0$ untuk sembarang $f \in \mathcal{M}$
(ii) $\langle f, f\rangle = 0$ berimplikasi bahwa $f = 0$
(iii) $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle_c$ untuk sembarang $f, g \in \mathcal{M}$
(iv) $\langle f, g\phi\rangle = \langle f, g\rangle\phi$ untuk sembarang $f, g \in \mathcal{M}$ dan sembarang $\phi \in A$.

Pemetaan $\langle\cdot,\cdot\rangle$ disebut sebuah produk dalam nilai-$A$ ($A$-*valued inner product*).

Definisi di atas merupakan definisi modul Pra Hilbert di atas $A$ dimana $A$ adalah aljabar-$C^*$ ($C^*$-*algebra*). Himpunan $A$ dapat juga berupa gelanggang (*ring*) ataupun lapangan (*field*). Contoh gelanggang adalah $\mathbb{R}$ (bilangan riil), $\mathbb{C}$ (bilangan kompleks), dan $\mathbb{H}$ (kuaternion) (Danielewski & Sapa, 2020). Ketika $A$ adalah kuaternion maka disebut **Modul-Kuaternion Pra-Hilbert** atau Modul-$\mathbb{H}$ Pra-Hilbert.

**Definisi 2.** (Manuilov & Troitsky, 2005) Sebuah Modul-$A$ $\mathcal{M}$ pada saat yang sama merupakan ruang Banach dengan norma (*norm*) $|\cdot|$ dan memenuhi pertidaksamaan $|f\phi| \leq |f||\phi|, f \in \mathcal{M}, \phi \in A$ disebut **Modul-$A$ Banach**.

**Definisi 3.** (Manuilov & Troitsky, 2005) Sebuah Modul-$A$ Pra-Hilbert disebut sebuah Modul-$C^*$ Hilbert jika lengkap menurut norma $|\cdot|_{\mathcal{M}}$.

Definisi 3 di atas artinya sama dengan aksioma ruang vektor kuaternionik nomor 3 di atas. Dari definisi 2 sama dengan aksioma nomor 2 pada persamaan 10. Ketika $C^*$ merupakan kuaternion maka disebut Modul-Kuaternion Hilbert. Berdasarkan Definisi 3 dan Definisi 2 sama dengan aksioma ruang Hilbert kuaternionik no 2 dan 3 dikatakan pula bahwa aksioma ruang Hilbert kuaternionik atau ruang vektor kuaternionik disebut juga dengan Modul-Kuaternion Hilbert.

Kesamaan ruang vektor kuaternionik dan Modul-Kuaternion Hilbert sudah pernah dibahas di (Razon, Horwitz, & Biedenharn, 1989) melalui jalur yang berbeda dengan artikel ini.

## PENUTUP

Ruang vektor kuaternionik atau ruang Hilbert kuaternionik disebut juga Modul-Kuaternion Hilbert. Untuk mempermudah pengucapan Modul-Kuaternion Hilbert sebut saja dengan Modul-Kuaternion.

## UCAPAN TERIMA KASIH

Ucapan terima kasih saya ucapkan kepada Allah SWT karena atas limpahan rahmat dan kesehatan yang diberikan penulis dapat menyelesaikan artikel ini. Ucapan terimakasih selanjutnya adalah panitia SINASIS 2021, karena berkat kerja keras panitian artikel ini dapat masuk dalam prosiding.

## DAFTAR PUSTAKA

Adler, S. L. (1995). Quaternionic Quantum Mechanics and Quantum Fields. New York: OXFORD UNIVERSITY PRESS.

Arbab, A. I. (2011). The Quaternionic Quantum Mechanics. *Applied Physics Research*, 3(2), 160–170. Retrieved from https://doi.org/10.5539/apr.v3n2p160

Danielewski, M., & Sapa, L. (2020). Foundations of The Quaternion Quantum Mechanics. *Entropy*, 22(12), 1–21. Retrieved from https://doi.org/10.3390/e22121424

De Leo, S., & Scolarici, G. (2000). Right Eigenvalue Equation in Quaternionic Quantum Mechanics. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 33(15), 2971–2995. Retrieved from https://doi.org/10.1088/0305-4470/33/15/306

Girard, P. R. (2007). *Quaternions, Clifford Algebras and Relativistic Physics* (Vol. 10.1007/97). Basel: Birkhäuser Basel. Retrieved from https://doi.org/10.1007/978-3-7643-7791-5

Manuilov, V. M. ., & Troitsky, E. V. (2005). *Mathematical Monograph Volume 226* (Vol. 226). American Mathematical Society.

Razon, A., Horwitz, L. P., & Biedenharn, L. C. (1989). On a basic theorem of quaternion modules. *Journal of Mathematical Physics*, 30(1), 59. Retrieved from https://doi.org/10.1063/1.528589