SINASIS 2 (1) (2021)

Prosiding Seminar Nasional Sains

Analisis Probabilitas Distribusi *Generalized Extreme Value* (GEV) dalam Pengelolaan Risiko Bencana di Indonesia

Wulan Anggraeni, Adhi Susano,
Universitas Indraprasta PGRI
E-mail: wulananggraeni41183@gmail.com

Info Artikel

Sejarah Artikel:
Diterima: 25 Mei 2021
Disetujui: 5 Juni 2021
Dipublikasikan: 30 Juni 2021

Kata kunci:
Fungsi Distribusi, *Generalized Extreme Value*, Risiko Bencana

Abstrak

Setiap tahunnya Indonesia masuk dalam daftar negara yang memiliki risiko kebencanaan tinggi. Pengkajian risiko bencana diperlukan untuk dapat mewujudkan tujuan pembangunan yang berkesinambungan. Salah satu pengkajian risiko bencana menggunakan analisis probabilitas, dalam artikel ini menggunakan pendekatan distribusi GEV.

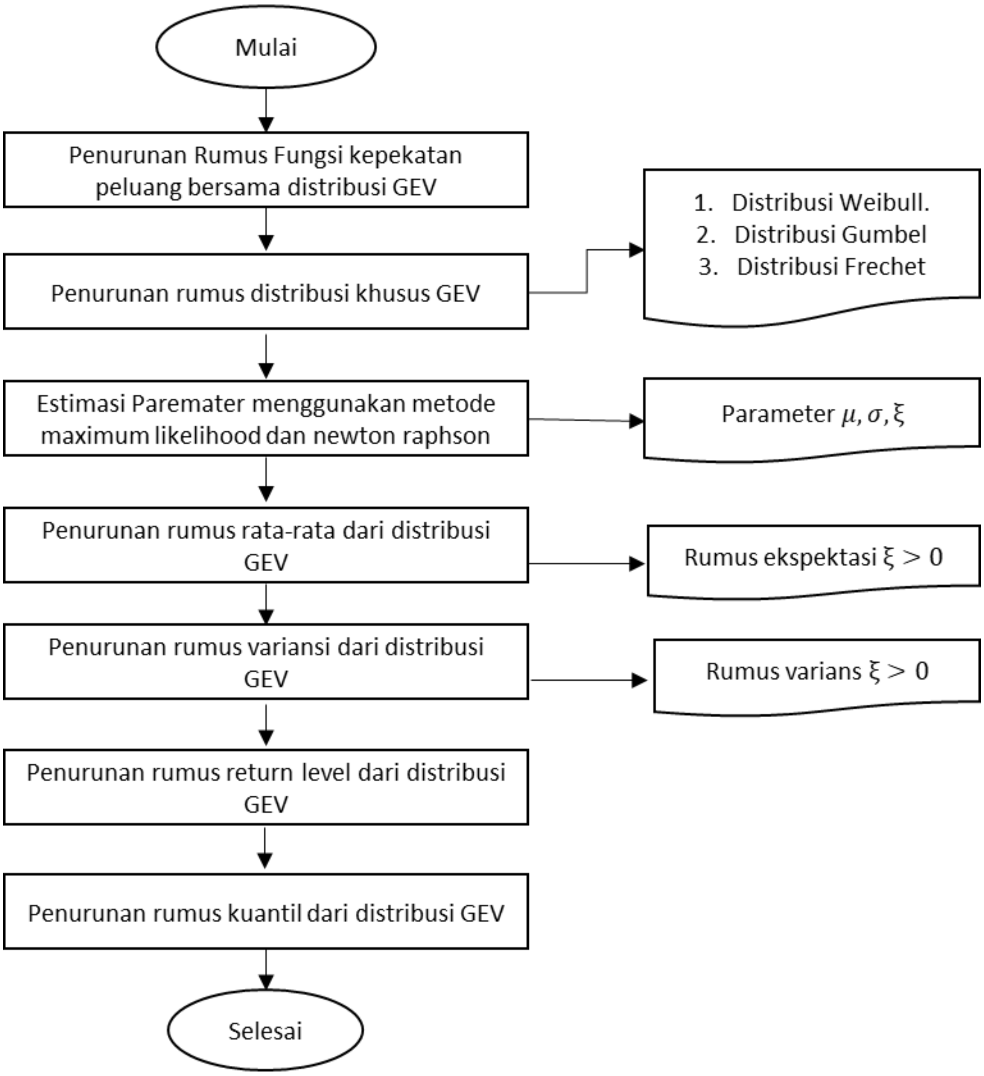
PENDAHULUAN

Setiap tahunnya Indonesia masuk dalam daftar negara yang memiliki risiko kebencanaan tinggi. Jenis bencana yang dapat terjadi dapat digolongkan kedalam 4 klaster. Klaster pertama yaitu geologi dan vulkanologi yang terdiri dari bencana alam seperti gempabumi, dan letusan gunung berapi. Klaster kedua adalah hidrometeorlogi yang sifatnya kering yaitu kekeringan dan kebakaran hutan. Klaster selanjutnya adalah hidrometeorologi yang sifatnya basah seperti banjir, bajir bandang, tanah longsor, angina putting beliung, hingga abrasi pantai. Sementara itu klaster terakhir adalah klaster nonalam, seperti bencana pandemi yang terjadi di tahun 2021 di Indonesia yakni Covid-19. Penyusunan perencanaan pembangunan berbasis risiko bencana perlu dilakukan untuk dapat memenuhi tujuan pembangunan yang berkesinambungan. Strategi yang diambil di masa lalu perlu dianalisis dan hasinya dapat dipergunakan untuk masa depan. Berbagai data statistik dapat dipergunakan dalam menggambarkan keadaan masa lalu dan masa kini.

Pengkajian risiko bencana merupakan sebuah pendekatan untuk memperlihatkan potensi dampak negative yang mungkin timbul akibat suatu potensi bencana yang ada. Dalam melakukan kajian risiko bencana, pendekatan fungsi dari tiga parameter pembentukan risiko bencana, yaitu ancaman, kerentanan, dan kapasitas terkait bencana. Salah satu prinsip dari proses pengkajian risiko bencana yaitu melakukan integrasi analisis probabilitas kejadian ancaman (Amri et al., 2018). Beberapa penelitian terkait penerapan distribusi GEV dalam risiko bencana di Indonesia telah dilakukan. Masimin (2011) megkaji rancangan distribusi waktu curah hujan menggunakan metode moment probabilitas dan blok puncak. Frastika et al (2013) menggunakan distribusi khusus GEV yaitu Gumbel dalam menentukan periode ulang (*return level*) gempabumi di Wilayah Sulawesi. (Desvina et al., 2014) mengkaji permasalahan pencemaran udara. Rusgiyono et al (2015) menelaah model curah hujan ekstrim di Kota Semarang menggunakan estimasi moment probabilitas terboboti. Rinaldi, (2016) membahas tentang penerapan distribusi GEV dan GP dalam pendugaan curah hujan ekstrim.. Sari et al (2016) membahas tentang aplikasi *Extreme Value Theory* (EVT) pada kasus kecepatan angin di Jawa Timur. Nara (2017) meneliti analisis kecenderungan curah hujan terhadap distribusi data ekstrim pada daerah aliran sungai di Pulau Ambon. Ginting & Putuhena (2017) mengkaji penerapan distribusi GEV dan distribusi *generalized pareto* (GP) untuk permasalahan curah hujan ekstrim. Rinaldi (2019) membahas penerapan GEV untuk kejadian ekstrim. Adiyani (2019) menggunakan distribusi GEV untuk menentukan nilai faktor pertumbuhan estimasi hujan di Pulau Jawa. Penelitian terdahulu hanya membahas tentang penerapan dari distribusi GEV, tanpa membahas penurunan formulasi distribusi khusus GEV, penurunan formulasi dalam estimasi parameter, rata-rata, variansi, kuantil dan *return level*, oleh karena itu dilakukan penurunan formulasi tersebut.

METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah analisis probabilitas. Analisis probabilitas adalah suatu nilai yang digunakan untuk mengukur tingkat terjadinya suatu kejadian yang acak (Finantika et al., 2018). Alur penelitian disajikan dalam Gambar 2.



Gambar1. Alur Penelitian

HASIL DAN PEMBAHASAN

Keluarga nilai ekstrim dapat digeneralisasi dalam bentuk:

$$G(z) = e^{-\left(1+\xi\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-\frac{1}{\xi}}} \tag{1}$$

Yang didefinisikan pada himpunan $z: 1 + \xi\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right) > 0$, dimana $-\infty < \mu < \infty, \sigma > 0, -\infty < \xi < \infty$. μ menyatakan parameter lokasi, σ menyatakan parameter skala, dan ξ menyatakan parameter bentuk. Fundamental teorema nilai ekstrem diperkenalkan oleh Misses-Jenkinson (Alves & Neves, 2011). Nilai parameter ξ yang mungkin adalah $\xi < 0, \xi = 0,$ dan $\xi > 0$.

1. **Fungsi Kepekatan Peluang GEV**

$$f(M;\mu,\sigma,\xi) = G'(z) = \frac{d(G)}{dv}.\frac{dv}{du}.\frac{du}{dz}$$

$$= -e^{-v}.-\frac{1}{\xi}.u^{\left(-\frac{1}{\xi}-1\right)}.\frac{\xi}{\sigma}$$

$$= e^{-\left(1+\xi\left(\frac{M-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-\frac{1}{\xi}}}.\frac{1}{\sigma}.\left(1+\xi\left(\frac{M-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-\left(\frac{1}{\xi}+1\right)}, \xi \neq 0$$

Misalkan

$$u = 1 + \xi\left(\frac{M-\mu}{\sigma}\right)$$

$$v = u^{-\frac{1}{\xi}}$$

$$G = e^{-v}$$

Berdasarkan uraian di atas, diperoleh fungsi kepekatan peluang sebagai berikut:

$$e^{-\left(1+\xi\left(\frac{M-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-\frac{1}{\xi}}}.\frac{1}{\sigma}.\left(1+\xi\left(\frac{M-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-\left(\frac{1}{\xi}+1\right)} \tag{2}$$

2. **Distribusi Weibull**

Untuk $\xi < 0$

$$G(x) = \exp\left(-\left(1+\xi\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right)$$

$$= \exp\left(-\left(1-\frac{\xi\mu}{\sigma}+\frac{\xi}{\sigma}z\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right)$$

$$= \exp\left(-\left(-\left(\frac{\xi\mu}{\sigma}-1+\left(\frac{\xi}{\sigma}\right)z\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right)\right)$$

Misalkan bahwa $\frac{\xi\mu}{\sigma} - 1 = b$,$a = \frac{\xi}{\sigma}, \alpha = -\frac{1}{\xi}$

Karena diasumsikan $\xi < 0$, maka $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, dan $\alpha > 0$, Sehingga,

$$G(z) = \exp\left(-\left(-(ax+b)\right)^{\alpha}\right) \tag{3}$$

3. **Distribusi Gumbel**

Untuk $\xi = 0$

$$G(z) = \exp\left(-\left(1+\xi\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right)$$

$$= \lim_{\xi\to 0}\exp\left(-\left(1+\xi\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right)$$

$$= \lim_{\xi \to 0} \exp\left(-\left(1+\left(\frac{\frac{z-\mu}{\sigma}}{\frac{1}{\xi}}\right)\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right)$$

Misalkan $m = \frac{1}{\xi}$, maka

$$G(m) = \lim_{m \to \infty} \exp\left(-\left(1+\left(\frac{\frac{z-\mu}{\sigma}}{m}\right)\right)^{-m}\right)$$

$$= \lim_{m \to \infty} \exp\left(-\left(\left(1+\left(\frac{\frac{z-\mu}{\sigma}}{m}\right)\right)^{m}\right)^{-1}\right)$$

Dikarenakan $= \lim_{m \to \infty} \left(1+\frac{x}{m}\right)^m = e^x$

Sehingga,

$$G(m) = \lim_{m \to \infty} \exp\left(-\left(\exp\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-1}\right)$$

$$= \exp\left(-\left(\exp\left(-\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)\right)\right)\right)$$

$$= \exp(-(\exp(-ax+b))) \tag{3}$$

$a = \frac{1}{\sigma} > 0$, dan $b = \frac{\mu}{\sigma} > 0$

4. Distribusi Frechet

Untuk $\xi < 0$

$$G(z) = \exp\left(-\left(1+\xi\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right)$$

$$= \exp\left(-\left(1-\frac{\xi\mu}{\sigma}+\frac{\xi}{\sigma}z\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right)$$

Misalkan, $\frac{\xi\mu}{\sigma} - 1 = b$,$a = \frac{\xi}{\sigma}, \alpha = -\frac{1}{\xi}$, karena $\xi > 0$, maka

$$G(z) = \exp(-(ax+b)^{-\alpha}) \tag{4}$$

5. Estimasi Parameter

Diberikan fungsi Kepekatan peluang dari GEV adalah sebagai berikut:

$$L(\mu,\sigma,\xi) = (\sigma)^{-n}\left[\left[\sum_{i=1}^{n}(1+\xi)\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-\frac{1}{\xi}-1}\right] e^{\left([-\sum_{i=1}^{n}\left[1+\xi\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-\frac{1}{\xi}}\right)}, \xi \neq 0$$

$$\ln L(\mu,\sigma,\xi) = -n\ln\sigma - \left(\frac{1}{\xi}+1\right)\ln\left(\sum_{i=1}^{n}(1+\xi)\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)\right) - \sum_{i=1}^{n}\left[1+\xi\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-\frac{1}{\xi}}$$

Turunan pertama dari $\ln L(\mu,\sigma,\xi)$ terhadap masing-masing parameter

$$\frac{\partial \ln L(\mu,\sigma,\xi)}{\partial\mu} = \left(\frac{1+\xi}{\mu}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(1+\xi\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-1} - \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\xi\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}-1}\right) = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial \ln L(\mu,\sigma,\xi)}{\partial\sigma} = -\frac{n}{\sigma} + (1+\xi)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma^2}\right)\left(1+\xi\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)^{-1}\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma^2}\right)\left(1+\xi\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}-1}\right) = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial \ln L(\mu,\sigma,\xi)}{\partial \xi} = \frac{1}{\xi^2}\sum_{i=1}^{n} \ln\left(1+\xi\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)\right) - \left(\frac{1}{\xi}+1\right)\sum_{i=1}^{n}\left(1+\xi\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)^{-1}\right)\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(1+\xi\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-\frac{1}{\xi}}\left(\left(\frac{1}{\xi^2}\right)\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\xi\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)\right) - \frac{1}{\xi}\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)}{1+\xi\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)}\right) = 0 \tag{7}$$

Dikarenakan fungsi turunan dari setiap parameter memiliki bentuk *closed form*, maka untuk menyelesaikan persamaan di atas, akan digunakan metode newton Raphson. Berikut adalah rumus umum yang digunakan untuk iterasi newton raphson

$$\hat{\theta}^{k+1} = \hat{\theta}^k + \alpha^k S^K \tag{8}$$

Dengan nilai α^k adalah fungsi yang dapat meminimumkan error , dimana $\alpha^k = \arg\min_{\alpha}\left(f\left(\hat{\theta}^k + \alpha^k S^K\right)\right)$ dan $S^k = -\left(H^k\right)g\left(\hat{\theta}^k\right)$. Langkah selanjutnya adalah menghitung $\Delta\hat{\theta}^k = \alpha^k S^K$ dan $\Delta g\left(\hat{\theta}^k\right) = g\left(\hat{\theta}^{k+1}\right) - g\left(\hat{\theta}^k\right)$ sehingga diperoleh persamaan:

$$H^{k+1} = H^k + \left(1 + \frac{\Delta g\left(\hat{\theta}^k\right)^T H^k \Delta g\left(\hat{\theta}^k\right)}{\Delta g\left(\hat{\theta}^k\right)^T \Delta\hat{\theta}^k}\right)\frac{\Delta\hat{\theta}^k \Delta\hat{\theta}^{(k)T}}{\Delta\hat{\theta}^{(k)T}\Delta g\left(\hat{\theta}^k\right)} - \frac{H^k \Delta g\left(\hat{\theta}^k\right)\Delta\hat{\theta}^{(k)T} + \left(H^k\right)\Delta g\left(\hat{\theta}^k\right)\Delta\hat{\theta}^{(k)T}}{\Delta g\left(\hat{\theta}^k\right)^T \Delta\hat{\theta}^k} \tag{9}$$

Iterasi di atas dilakukan sampai memenuhi kondisi $\left|\hat{\theta}^{k+1} - \hat{\theta}^k\right| \leq \varepsilon$, dengan ε adalah bilangan yang ditentukan. Setelah iterasi diperoleh maka nilai dari parameter GEV untuk $\xi \neq 0$ akan diperoleh. Untuk memperoleh elemen dari matriks hessian, maka akan dilakukan diferensiasi kedua untuk setiap parameter yang ada pada fungsi likelihood.

$$\frac{\partial^2 \ln L(\mu,\sigma,\xi)}{\partial \mu^2} = \left(\frac{\xi+\xi^2}{\sigma^2}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(1+\xi\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-2} - \left(\frac{1+\xi}{\sigma^2}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(1+\xi\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-\frac{1}{\xi}-2}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\mu,\sigma,\xi)}{\partial \sigma^2} = \frac{n}{\sigma^2} + (1+\xi)\sum_{i=1}^{n}\left(-2\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma^3}\right)\left(1+\xi\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-1} + \left(\xi\frac{(M_i-\mu)^2}{\sigma^4}\right)\left(1+\xi\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-2}\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(-2\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma^3}\right)\left(1+\xi\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-\frac{1}{\xi}-1} + \left(\xi\frac{(M_i-\mu)^2}{\sigma^4}\right)\left(\frac{1}{\xi}+1\right)\left(1+\xi\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-\frac{1}{\xi}-2}\right) \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\mu,\sigma,\xi)}{\partial \xi^2} = -\frac{2}{\xi^3}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\xi\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)\right) + \frac{1}{\xi^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)}{1+\xi\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)}\right) - \left(\frac{1}{\xi^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)}{1+\xi\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)}\right) - \left(\frac{1}{\xi}+1\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)^2\left(1+\xi\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-2}\right) - \left(\sum_{i=1}^{n}\left(1+\xi\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-\frac{1}{\xi}}\left(\frac{1}{\xi^2}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\xi\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)\right) - \frac{1}{\xi}\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)}{1+\xi\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)}\right)\frac{1}{\xi^2}\right) - \frac{2}{\xi^2}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\xi\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-\frac{1}{\xi}}\frac{\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)}{1+\xi\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)} + \left(\sum_{i=1}^{n}\left(1+\xi\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-\frac{1}{\xi}}\left(\frac{1}{\xi^2}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\xi\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)\right) - \frac{1}{\xi}\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)}{1+\xi\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)}\right) - \frac{1}{\xi}\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(1+\xi\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-\frac{1}{\xi}}\left(\frac{\frac{1}{\xi^2}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\xi\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)\right)+\frac{1}{\xi}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(1+\xi\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)\right)^2}\right) \tag{11}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\mu,\sigma,\xi)}{\partial \mu \partial \sigma} = -\frac{(1+\xi)}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\xi\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-1} - \left(\frac{\xi+\xi^2}{\sigma}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(1+\xi\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-2}\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right) + \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\xi\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-\frac{1}{\xi}-1} - \frac{1+\xi}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\xi\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-\frac{1}{\xi}-2}\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right) \tag{12}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\mu,\sigma,\xi)}{\partial \mu \partial \xi} = \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\xi\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-1} - \frac{1+\xi}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\xi\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-2}\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right) - \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\xi\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-\frac{1}{\xi}-1}\left(\frac{1}{\xi^2}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\xi\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)\right) - \left(\frac{1}{\xi}+1\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)}{1+\xi\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)}\right) \tag{13}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\mu,\sigma,\xi)}{\partial \sigma \partial \xi} = \sum_{i=1}^{n}\left(1+\xi\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-1}\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right) - (1+\xi)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(M_i-\mu)^2}{\sigma^3}\right)\left(1+\xi\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-2} - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma^2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left(1+\xi\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-\frac{1}{\xi}-1}\left(\frac{1}{\xi^2}\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\xi\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)) - \left(\frac{1}{\xi}+1\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)}{1+\xi\left(\frac{M_i-\mu}{\sigma}\right)}\right)\right) \tag{14}$$

6. Ekpektasi

Untuk $\xi > 0$

$$E(M^n) = \int_{\mu-\frac{\sigma}{\xi}}^{0} M^n e^{-\left(1+\xi\left(\frac{M-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-\frac{1}{\xi}}} . \frac{1}{\sigma} . \left(1+\xi\left(\frac{M-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-\left(\frac{1}{\xi}+1\right)} dx$$

Misalkan:

$$y = \left(1+\xi\left(\frac{M-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-\frac{1}{\xi}}$$

$$1+\xi\left(\frac{M-\mu}{\sigma}\right) = y^{-\xi}$$

$$\xi\left(\frac{M-\mu}{\sigma}\right) = y^{-\xi} - 1$$

$$\left(\frac{M-\mu}{\sigma}\right) = \frac{y^{-\xi} - 1}{\xi}$$

$$M = \mu + \frac{\sigma}{\xi}\left(y^{-\xi} - 1\right)$$

$$\frac{dM}{dy} = -\sigma y^{-\xi-1}$$

$$E(M^n) = \int_{0}^{\infty} \left(\mu + \frac{\sigma}{\xi}\left(y^{-\xi} - 1\right)\right)^n . \frac{1}{\sigma} . \left(y^{-\xi}\right)^{-\left(\frac{1}{\xi}+1\right)} . e^{-y} . -\sigma y^{-\xi-1} dy$$

$$= \int_{0}^{\infty} \left(\mu + \frac{\sigma}{\xi}\left(y^{-\xi} - 1\right)\right)^n e^{-y} dy$$

$$= \int_{0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\mu - \frac{\sigma}{\xi}\right)^k \left(\frac{\sigma}{\xi} y^{-\xi}\right)^{n-k} e^{-y} dy$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\mu - \frac{\sigma}{\xi}\right)^k \int_{0}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{\xi} y^{-\xi}\right)^{n-k} e^{-y} dy$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\mu - \frac{\sigma}{\xi}\right)^k \left(\frac{\sigma}{\xi}\right)^{n-k} \int_{0}^{\infty} \left(y^{-\xi}\right)^{n-k} e^{-y} dy$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\mu - \frac{\sigma}{\xi}\right)^k \left(\frac{\sigma}{\xi}\right) \int_{0}^{\infty} y^{\xi(n-k)} e^{-y} dy$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\mu - \frac{\sigma}{\xi}\right)^k \left(\frac{\sigma}{\xi}\right)^{n-k} \Gamma\left(1 - \xi(n-k)\right)$$

$$E(M) = \binom{1}{0} \left(\mu - \frac{\sigma}{\xi}\right)^0 \left(\frac{\sigma}{\xi}\right)^1 \Gamma\left(1 - \xi(1)\right) + \binom{1}{1} \left(\mu - \frac{\sigma}{\xi}\right)^1 \left(\frac{\sigma}{\xi}\right)^0 \Gamma(1)$$

$$= \left(\frac{\sigma}{\xi}\right) \Gamma\left(1 - \xi(1)\right) + \left(\mu - \frac{\sigma}{\xi}\right) \Gamma(1)$$

$$= \left(\frac{\sigma}{\xi}\right) \Gamma(1 - \xi) + \mu - \frac{\sigma}{\xi}$$

$$= \mu + \left(\frac{\sigma}{\xi}\right) \left(\Gamma(1 - \xi) - 1\right) \tag{15}$$

Dimana:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} (a)^k . (b)^{n-k}$$

$$\Gamma(x) = \int_{0}^{\infty} x^{y-1} e^{-x} dx$$

7. Variansi

$$Var(M) = E(M^2) - \left(E(M)\right)^2$$
$$E(M^2) = \binom{2}{0}\left(\mu - \frac{\sigma}{\xi}\right)^0 \left(\frac{\sigma}{\xi}\right)^2 \Gamma\left(1-\xi(2)\right) + \binom{2}{1}\left(\mu - \frac{\sigma}{\xi}\right)^1 \left(\frac{\sigma}{\xi}\right)^1 \Gamma\left(1-\xi(1)\right) + \binom{2}{2}\left(\mu - \frac{\sigma}{\xi}\right)^2 \left(\frac{\sigma}{\xi}\right)^0 \Gamma(1)$$
$$= \left(\frac{\sigma}{\xi}\right)^2 \Gamma\left(1-\xi(2)\right) + 2\left(\mu - \frac{\sigma}{\xi}\right)\left(\frac{\sigma}{\xi}\right)\Gamma(1-\xi) + \left(\mu - \frac{\sigma}{\xi}\right)^2$$
$$= \left(\frac{\sigma}{\xi}\right)^2 \Gamma\left(1-\xi(2)\right) + 2\frac{\mu\sigma}{\xi}\Gamma(1-\xi) - 2\left(\frac{\sigma}{\xi}\right)^2 \Gamma(1-\xi) + \mu^2 - 2\frac{\mu\sigma}{\xi} + \left(\frac{\sigma}{\xi}\right)^2$$
$$\left(E(M)\right)^2 = \left(\mu + \left(\frac{\sigma}{\xi}\right)(\Gamma(1-\xi)-1)\right)^2$$
$$= \mu^2 + 2\frac{\mu\sigma}{\xi}(\Gamma(1-\xi)-1) + \left(\frac{\sigma}{\xi}\right)^2 (\Gamma(1-\xi)-1)^2$$
$$= \mu^2 + 2\frac{\mu\sigma}{\xi}(\Gamma(1-\xi)-1) + \left(\frac{\sigma}{\xi}\right)^2 (\Gamma^2(1-\xi) - 2\Gamma(1-\xi) + 1)$$
$$= \mu^2 + 2\frac{\mu\sigma}{\xi}(\Gamma(1-\xi)-1) + \left(\frac{\sigma}{\xi}\right)^2 \Gamma^2(1-\xi) - 2\left(\frac{\sigma}{\xi}\right)^2 \Gamma(1-\xi) + \left(\frac{\sigma}{\xi}\right)^2$$
$$Var(X) = \left(\frac{\sigma}{\xi}\right)^2 \Gamma\left(1-\xi(2)\right) - \left(\frac{\sigma}{\xi}\right)^2 \Gamma^2(1-\xi)$$
$$= \left(\frac{\sigma}{\xi}\right)^2 \left(\Gamma\left(1-\xi(2)\right) - \Gamma^2(1-\xi)\right) \qquad (16)$$

8. Kuantil

Kuantil dinotasikan z_p dari peubah acak didefinisikan sebagai berikut:

$$P\left(X \leq M_p\right) = p$$
$$G\left(M_p\right) = p$$
$$\exp\left(-\left(1 - \frac{\xi\mu}{\sigma} + \frac{\xi}{\sigma}m_p\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right) = p$$
$$\left(-\left(1 - \frac{\xi\mu}{\sigma} + \frac{\xi}{\sigma}m_p\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right) = \ln p$$
$$1 - \frac{\xi\mu}{\sigma} + \frac{\xi}{\sigma}m_p = (-\ln p)^{-\xi}$$
$$-\frac{\xi\mu}{\sigma} + \frac{\xi}{\sigma}m_p = (-\ln p)^{-\xi} - 1$$
$$m_p = \mu + \frac{\sigma}{\xi}\left((-\ln p)^{-\xi} - 1\right) \qquad (17)$$

Contoh:

Penentuan median

$$m_{\frac{1}{2}} = \mu + \frac{\sigma}{\xi}\left((\ln 2)^{-\xi} - 1\right)$$

9. Return Level

$$P(M > m_T) = \frac{1}{T}$$
$$P(M \leq m_T) = 1 - \frac{1}{T}$$
$$G(m_T) = 1 - \frac{1}{T}$$
$$e^{-\left(1+\xi\left(\frac{m_t-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-\frac{1}{\xi}}} = 1 - \frac{1}{T}$$
$$-\left(1 + \xi\left(\frac{m_T - \mu}{\sigma}\right)\right)^{-\frac{1}{\xi}} = \ln\left(1 - \frac{1}{T}\right)$$
$$\left(1 + \xi\left(\frac{m_T - \mu}{\sigma}\right)\right) = -\left(\ln\left(1 - \frac{1}{T}\right)\right)^{-\xi}$$

$$m_T = \mu + \frac{\sigma}{\xi}\left(-\left(\ln\left(1-\frac{1}{T}\right)\right)^{-\xi} - 1\right)$$
$$m_T = \mu + \frac{\sigma}{\xi}\left(\xi\left(\ln\left(1-\frac{1}{T}\right)\right) - 1\right)$$
$$m_T = \mu + \sigma\left(\ln(1-\frac{1}{T}\right) - \frac{\sigma}{\xi} \tag{18}$$

PENUTUP

Penurunan formulasi distribusi GEV untuk nilai ξ yang berbeda akan menghasilkan distribusi khusus yakni Weibull, gumbel, dan frechet. Estimasi parameter dari distribusi GEV tidak dapat diselesaikan secara langsung menggunakan metode *maximum likelihood*, oleh karena itu perlu dilakukan penyelesaian masalah yang ada menggunakan metode *newton raphson*. Penentuan nilai ekspektasi, variansi, kuantil dan *return level* menggunakan teori probabilitas. Analisis probabilitas yang dilakukan dalam penelitian ini hanya terbatas menurunkan rumus-rumus. Hasil yang diperoleh dapat digunakan dalam pengelolaan risiko bencana di Indonesia. Selain itu juga dalam artikel ini tidak mensimulasikan secara numerik, untuk itu perlu dilakukan simulasi secara numerik.

DAFTAR PUSTAKA

Adiyani, L. (2019). Nilai Faktor Pertumbuhan untuk Estimasi Hujan Rencana di Pulau Jawa. *Jurnal Sumber Daya Air*, *15*(1), 56–68. https://doi.org/10.32679/jsda.v15i1.496

Alves, I. F., & Neves, C. (2011). Extreme Value Distributions. *International Encyclopedia of Statistical Science*, *2*(i), 493–496. https://doi.org/10.1007/978-3-642-04898-2_246

Amri, M. R., Yulianti, G., Yunus, R., Wiguna, S., W. Adi, A., Ichwana, A. N., & Randongkir, Roling Evans Septian, R. T. (2018). RBI (Risiko Bencana Indonesia). *BNPB Direktorat Pengurangan Risiko Bencana*, 1–218.

Desvina, A. P., Marzuki, C. C., & Matematika, J. (2014). *Pemodelan Distribusi untuk Data Pencemaran Udara oleh Particulate Matter (PM10) di Pekanbaru*. 978–979.

Fiantika, T., Suryo, E. A., & Harimurti, H. (2018). Analisis Probabilitas Keruntuhan Pada Lereng Tanah Residual Dengan Variasi Sudut Kemiringan Lereng. *Rekayasa Sipil*, *12*(2), 105–111. https://doi.org/10.21776/ub.rekayasasipil.2018.012.02.5

Frastika, Y., Pasau, G., & Prang, J. D. (2013). Estimasi Periode Ulang Gempa Bumi Di Wilayah Sulawesi Dengan Menggunakan Distribusi Gumbel. *Jurnal MIPA*, *2*(2), 151. https://doi.org/10.35799/jm.2.2.2013.3208

Ginting, S., & Putuhena, W. M. (2017). Hujan rancangan berdasarkan analisis frekuensi regional dengan metode tl-moment. *Jurnal Sumber Daya Air*, *12*(1), 1–16. https://doi.org/10.32679/jsda.v12i1.160

Masimin. (2011). *Rancangan distribusi waktu curah hujan menggunakan metode momen probabilitas dan blok puncak*. *1*(September), 71–80.

Nara, O. D. (2017). *Distribusi Data Ekstrim Pada Daerah Aliran Sungai Rain Teaching Trend Analysis of Extrim Data Distribution on River Flow Area*. *17*(1), 1–8.

Rinaldi, A. (2016). Sebaran Generalized Extreme Value (GEV) Dan Generalized Pareto (GP) untuk Pendugaan Curah Hujan Ekstrim di Wilayah DKI Jakarta. *Al-Jabar : Jurnal Pendidikan Matematika*, *7*(1), 75–84. https://doi.org/10.24042/ajpm.v7i1.137

Rusgiyono, A., Wuryandari, T., & Rahmawati, A. (2015). Model Curah Hujan Ekstrem Di Kota Semarang Menggunakan Estimasi Moment Probabilitas Terboboti. *Media Statistika*, *8*(1), 13–22. https://doi.org/10.14710/medstat.8.1.13-22

Sari, D. K., Wardhani, N. W. S., & Astutik, S. (2016). Parameter Estimation of Structural Equation Modeling Using Bayesian Approach. *CAUCHY*, *4*(2), 86. https://doi.org/10.18860/ca.v4i2.3492